高１・高２ ハイレベル数学Ⅱを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ 高１・高２ハイレベル数学Ⅱの講座へ。この講座は

「基本問題だけではなく，応用問題を自力で解けるようになりたい」

という人に適した講座となっています。

数学Ⅱでは，高校数学の根幹とも言える内容を学習します。この講座では，それまでに学び，また標準的な問題を解くことで自分のものになったはずの知識・技能を振り返りながら，その活用の仕方を，問題を通じてじっくり深く学んでいきます。

この講座を受講いただくことで，知識・技能のもつ意味や，その使い方，使う場面を体験することができます。また，なぜそういった手法を取るのか，それによって何が解決できるのか，を学ぶことで，解法に対する納得感が高まります。そのため，解法を丸暗記する必要がなく，さらに，今後の学習で出会う様々な問題の中で広く使える数学的な見方・考え方が身についていきます。この講座を通じて数学Ⅱと新たな気持ちで向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業をしています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことなんだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に学んだ知識・技能や解法の一部または全部を使うことで，その真意がわかる，というのも数学ならではですし，気になった時点で前に戻り，改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です。

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　式と証明

第１講　式と計算
PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解
PART2　二項定理
PART3　分数式の計算

第２講　命題と証明
PART1　恒等式，等式の証明
PART2　不等式の証明
PART3　相加平均と相乗平均

第２章　複素数と方程式

第３講　命題と証明
PART1　複素数と式の値，解と係数の関係
PART2　３次方程式の解から係数の決定
PART3　x^2+x+1 と虚数立方根

第３章　図形と方程式

第４講　点と直線
PART1　２直線の交点を通る直線
PART2　線対称の点，折れ線の長さの最小値
PART3　三角形の面積，三角形の外心の座標

第５講　円
PART1　円と直線，円の弦の長さ
PART2　円の接線，２円の交点を通る図形
PART3　２円の位置関係，２円の共通弦

第６講　軌跡
PART1　定点からの距離が一定，媒介変数と軌跡
PART2　動点と軌跡
PART3　放物線の弦の中点の軌跡

第７講　領域
PART1　領域を利用した証明
PART2　領域と最大・最小
PART3　正領域・負領域

第４章　三角関数

第８講　三角関数のグラフ，方程式・不等式
PART1　三角関数のグラフ
PART2　三角関数を含む方程式・不等式
PART3　三角関数を含む方程式の解が存在する条件

第９講　加法定理
PART1　三角関数を含む方程式・不等式（２倍角の公式）
PART2　三角関数の媒介変数表示
PART3　３倍角の公式とその利用

第10講　三角関数の合成と最大・最小
PART1　三角関数の最大・最小（合成）
PART2　三角関数の最大・最小（$t=\sin\theta-\cos\theta$）
PART3　三角関数の最大・最小（２倍角・半角の公式）

第５章　指数関数・対数関数

第11講　指数の拡張，指数関数
PART1　指数の計算と式の値
PART2　指数関数を含む方程式・不等式
PART3　累乗根の大小，指数関数の最大・最小

第12講　対数とその性質，対数関数
PART1　対数の計算と式の値
PART2　対数関数を含む方程式・不等式
PART3　対数の大小，対数関数の最大・最小

第13講　指数・対数関数の様々な問題
PART1　指数・対数と式の値
PART2　常用対数
PART3　指数関数・対数関数の最大・最小

第６章　微分法・積分法

第14講　微分係数と導関数
PART1　平均変化率と微分係数
PART2　接線の方程式
PART3　共通接線

第15講　導関数の応用
PART1　関数の極大・極小
PART2　絶対値を含む関数のグラフ
PART3　３次関数の最大・最小

第16講　方程式・不等式への応用
PART1　高次方程式の実数解の個数
PART2　３本の接線が引けるための条件
PART3　不等式を満たす定数の値の範囲

第17講　不定積分，定積分
PART1　定積分の性質
PART2　絶対値を含む関数の定積分
PART3　定積分で表された関数の決定

第18講　定積分と面積
PART1　放物線と x 軸の間の面積
PART2　３次関数のグラフと x 軸の間の面積
PART3　変数を含む定積分の最大・最小

第19講　２曲線と面積
PART1　曲線と接線の間の面積
PART2　面積を２等分
PART3　面積の最大・最小

講座の受講の仕方

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力をつけていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに３つの PART（セクション）に分かれています。

各 PART は，次のような項目で構成されています。

「講義問題」（1，2など）

⇒　その PART で学ぶべき内容を含んだ問題。

PART によっては，1[1]，1[2]のように分かれている場合もあります。

「Point Pickup」

⇒　「講義問題」を解くために必要な知識・技能や考え方，方針を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。「講義問題」の予習は必要ありませんが，あらかじめ自分で解けるところまで解いてから，「動画」を見ても構いません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら，テキストと筆記用具を手元におき，動画を再生してください。そして，真剣に受講して，先生がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれる PART 内の動画は，１つまたは複数のチャプターに分かれています。

（例）　第１講　式と計算

PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解　…　【講義問題1】

PART2　二項定理　…　【講義問題2[1]】・【講義問題2[2]】

それぞれの PART における主な受講の流れを説明します。

(1)　【講義問題】のチャプターで，講義問題を解く上で必要な知識，用語，公式等を「Point Pickup」を交えながら説明します。その後，講義問題を解説していきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一時停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書

いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

(2) 解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照し，また必要に応じて講義問題の動画を見直し，どこに手が止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。最後まで解ききったら，自分で書いた解答を最初から最後まで読み，その流れを把握することをオススメいたします。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「講義問題＆ Point Pickup を通じて学ぶ」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分程度の受講時間となります。

各講に含まれる 3 つの PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は，PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・**「新しい知識や考え方，その使い方や場面を知って，思考の幅を広げる」**

・**「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」**

・**「問題が解けるようになることがゴールではなく，なぜそう解くのかを学ぶ」**

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，応用問題から学んだ経験が少ない人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれません。ですが，安心してください。この講座は，好きなところで動画を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味をもつのかを考えること，必要なら戻って何度も再生すること。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう 1 つ大切なこと，それは

・**「やっぱり自分はできない」は厳禁！**

だと言うことです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気づいていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この講(PART)から何を知ったか，何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。学んだ記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学びを実感し，学びを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその PART の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに「**確認問題**」を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，それを活用する練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら，自覚しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まります。これは今後，数学Ⅱを活用するための貴重な経験としてあなたに刻まれていきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 15 分～ 30 分。それを，どの曜日のどの時間帯に何 PART(何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。あなたが学校で時間割に沿って授業を受けるのと同じように，まずはあなたのスケジュールに『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ⅱと本気

で向き合う時間，これを組みこんでください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気づき，それが「自信」につながります。

この「高１・高２ ハイレベル数学Ⅱ」は，これまでの学習や問題演習で培った知識・技能を活用する方法や場面を経験するための講座ですが，ご紹介できているのはその方法や場面のほんの一部となります。受講後は，**「高１・高２ トップレベル数学ⅠAⅡB＋C（ベクトル）」**に進んでみてください。自分のもっている知識に，さらにこんな使い方があるのか，という気づきが得られ，その気づきにより，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に拡がる数学Ⅱの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

[MEMO]

[MEMO]

第 1 講　式と計算

PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解

1　(1)　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを示せ。

(2)　$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(3)　$x^3+8y^3+18xy-27$ を因数分解せよ。

Point Pickup

3 次式の展開の公式　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

この式と，3 次式の因数分解の公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を用いることで，

$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解することができる。

第 1 講　PART1　確認問題

1　次の等式を証明せよ。

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

（証明）

$(a+b)^3=a^3+\boxed{ア}a^2b+\boxed{イ}ab^2+b^3$ であるから

$$a^3+b^3=(a+b)^{\boxed{ウ}}-\boxed{ア}a^2b-\boxed{イ}ab^2$$

$$=(a+b)^{\boxed{ウ}}-\boxed{エ}ab(a+b)$$

よって　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

2　$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b)^3-\boxed{オ}ab(a+b)+c^3-3abc$$

$$=(a+b)^3+c^3-\boxed{オ}ab(a+b)-3abc$$

$$=\{(a+b)+c\}\{\boxed{カ}\}-3ab(\boxed{キ})$$

$$=(\boxed{ク})(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-\boxed{ケ}ab)$$

$$=(\boxed{ク})(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

[$\boxed{カ}$ の選択肢]

① $(a+b)^2+(a+b)c+c^2$

② $(a+b)^2+(a+b)c-c^2$

③ $(a+b)^2-(a+b)c+c^2$

④ $(a+b)^2-(a+b)c-c^2$

[$\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$ の選択肢]

① $a+b+c$　　② $a+b-c$

③ $a-b+c$　　④ $a-b-c$

3 $x^3+27y^3-1+9xy$ を因数分解せよ。

$$x^3+27y^3-1+9xy$$
$$=(x+\boxed{\text{コ}}\,y-\boxed{\text{サ}})(x^2-\boxed{\text{シ}}\,xy+\boxed{\text{ス}}\,y^2+x+\boxed{\text{セ}}\,y+\boxed{\text{ソ}})$$

【MEMO】

PART2　二項定理

2　[1]　(1)　$(1+x)^4$ を展開せよ。

(2)　次の等式を証明せよ。

(i)　${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$

(ii)　${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

[2]　$(x+y-3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の係数を求めよ。

Point Pickup

$(a+b)^n$ の展開式の一般項は ${}_nC_r\,a^{n-r}\,b^r$

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^p\,b^q\,c^r$　（ただし $p+q+r=n$）

第 1 講　PART2　確認問題

1　$(1+x)^5$ を展開せよ。

$(1+x)^5$

$=x^5+$ ア x^4+ イウ x^3+ エオ x^2+ カ $x+$ キ

2　次の空欄に当てはまる式を求めよ。

$${}_n\mathrm{C}_0+4{}_n\mathrm{C}_1+4^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+4^n{}_n\mathrm{C}_n=\boxed{\text{ク}}$$

① 3^{n-1}　② 3^n　③ 3^{n+1}

④ 4^{n-1}　⑤ 4^n　⑥ 4^{n+1}

⑦ 5^{n-1}　⑧ 5^n　⑨ 5^{n+1}

3　次の式の値を求めよ。

$${}_5\mathrm{C}_0-\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{4}+\cdots\cdots+(-1)^5\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^5}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

4　$(2x+y-z)^6$ の展開式における xy^2z^3 の係数を求めよ。

シスセソ

PART3　分数式の計算

3　[1]　$\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ。

[2]　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$　　(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

Point Pickup

[1]　ある分数式を，複数の分数式の和や差の形(または多項式と複数の分数式の和や差の形)で表すことを，「部分分数に分解する」という。

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$$

[2]　(分子の次数)≧(分母の次数)である分数式 $\dfrac{A}{B}$ は，A を B で割った商 Q と余り R を用いて

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

の形に変形するとよい。

第 1 講　PART3　確認問題

次の計算をせよ。

1 $\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+7)}$

$=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)\left(x+\boxed{\text{ウ}}\right)}$

2 $\dfrac{x^2+2x-12}{x-3}-\dfrac{x^2+9x+23}{x+4}$

$=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\left(x-\boxed{\text{カ}}\right)\left(x+\boxed{\text{キ}}\right)}$

3 $-\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x+4}{x+2}+\dfrac{x-4}{x-2}-\dfrac{x-5}{x-3}$

$=\dfrac{\boxed{\text{ク}}\left(2x-\boxed{\text{ケ}}\right)}{\left(x+\boxed{\text{コ}}\right)\left(x+\boxed{\text{サ}}\right)\left(x-\boxed{\text{シ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ス}}\right)}$

ただし，$\boxed{\text{コ}}<\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式，等式の証明

1　［1］　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c=x^3+x^2-8x+5$$

［2］　実数 a，b，c について，$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

Point Pickup

［1］　x についての恒等式における未定係数の決定には，以下の 2 つの解法がある。

・係数比較法（両辺の同じ次数の項の係数が等しいことの利用）

・数値代入法（x にどんな値を代入しても成り立つ）

［2］　条件付きの等式の証明は，条件を用いて文字を減らして進めるとよい。

第２講　PART1　確認問題

1　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$3(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c$$
$$=3x^3+9x^2+7x+1$$

$a=$ アイ，$b=$ ウ，$c=$ エオ

2　a，b，c が 0 でない実数で，$a+b+c=0$ のとき，

$$\frac{1-bc}{(a+b)(c+a)}+\frac{1-ca}{(b+c)(a+b)}+\frac{1-ab}{(c+a)(b+c)}$$

の値を求めよ。

カキ

PART2　不等式の証明

2　[1]　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

(2)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

[2]　x，y を実数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$|x|-|y| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$$

Point Pickup

[1]　(1)　実数 A について　$A^2 \geqq 0$（等号成立は $A=0$ のとき）

(2)　実数 A，B について　$A^2+B^2 \geqq 0$（等号成立は $A=B=0$ のとき）

[2]　$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ のとき　$A \geqq B \iff A^2 \geqq B^2$

また　$A>0$ のとき　$|A|=A$，$|A|>-A$

$A=0$ のとき　$|A|=A=-A$

$A<0$ のとき　$|A|=-A$，$|A|>A$

よって　$|A| \geqq A$，$|A| \geqq -A$

第 2 講　PART2　確認問題

次の不等式を証明せよ。ただし，使われている文字はすべて実数とし，選択肢は最も適切なものを選べ。

1 $(x^8+y^8)(x^6+y^6) \geqq (x^7+y^7)^2$

（証明）

$(x^8+y^8)(x^6+y^6)-(x^7+y^7)^2$

$=x^{\boxed{アイ}}+x^8y^6+x^6y^8+y^{\boxed{アイ}}$

$-\left(x^{\boxed{ウエ}}+2x^7y^7+y^{\boxed{ウエ}}\right)$

$=(x^3)^{\boxed{オ}}(y^3)^{\boxed{カ}}(x-y)^{\boxed{キ}} \geqq \boxed{ク}$

よって　$(x^8+y^8)(x^6+y^6) \geqq (x^7+y^7)^2$

2 $a^2+b^2+c^2 \geqq -ab-bc-ca$

（証明）

$a^2+b^2+c^2-(-ab-bc-ca)$

$=a^2+(b+c)a+b^2+bc+c^2$

$=\boxed{\text{ケ}}-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2+b^2+bc+c^2$

$=\boxed{\text{ケ}}+\dfrac{3}{4}\boxed{\text{コ}}+\dfrac{2}{3}\boxed{\text{サ}} \geqq \boxed{\text{シ}}$

よって　$a^2+b^2+c^2 \geqq -ab-bc-ca$

[$\boxed{\text{ケ}}$ の選択肢]

① $(a+b+c)^2$　　② $(a-b-c)^2$

③ $\left(a+\dfrac{b+c}{2}\right)^2$　　④ $\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2$

[$\boxed{\text{コ}}$ の選択肢]

① $(b+c)^2$　　② $(b-c)^2$

③ $\left(b+\dfrac{c}{3}\right)^2$　　④ $\left(b-\dfrac{c}{3}\right)^2$

[$\boxed{\text{サ}}$ の選択肢]

① c　　② c^2　　③ bc

3 $|x|-|y| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$

（証明）

$|x-y| \leqq |x|+|y|$ を示す。

$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$

$=|x|^2+$ [ス] $+|y|^2-\left(x^2-\right.$ [セ] $\left.+y^2\right)$

$=$ [ソ] $\geqq$ [タ]

よって　$|x-y|^2 \leqq (|x|+|y|)^2$

$|x-y| \geqq 0$，$|x|+|y| \geqq 0$ であるから

$|x-y| \leqq |x|+|y|$

次に，$|x|-|y| \leqq |x-y|$ を示す。

(i)　$|x|-|y| \geqq 0$ のとき

$|x-y|^2-(|x|-|y|)^2$

$=\left(x^2-\right.$ [セ] $\left.+y^2\right)-\left(|x|^2-\right.$ [チ] $\left.+|y|^2\right)$

$=$ [ツ] $\geqq$ [テ]

よって　$(|x|-|y|)^2 \leqq |x-y|^2$

$|x|-|y| \geqq 0$，$|x-y| \geqq 0$ であるから

$|x|-|y| \leqq |x-y|$

(ii)　$|x|-|y|<0$ のとき

$|x-y| \geqq 0$ であるから　$|x|-|y|<|x-y|$

(i)，(ii)より　$|x|-|y| \leqq |x-y|$

以上から　$|x|-|y| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$

[[ス]～[ソ]，[チ]，[ツ] の選択肢]

① $(x+y)^2$　② $(x-y)^2$

③ $2xy$　④ $2|x||y|$

⑤ $x+y$　⑥ $|x|+|y|$

⑦ $2(|xy|+xy)$　⑧ $2(|xy|-xy)$

⑨ $2(xy-|xy|)$

PART3　相加平均と相乗平均

3　［1］　$a>0$，$b>0$，$a \neq b$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ の大小を比較せよ。

［2］　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ。

Point Pickup

［1］　相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　（等号成立は $a=b$ のとき）

大小比較をする値が文字で表されている場合は，文字に適当な値を入れることで大小を予測してから証明するとよい。

［2］　相加平均と相乗平均の大小関係より，$a>0$，$b>0$ のとき $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ であるから，右辺 $2\sqrt{ab}$ が定数となり，かつ等号が成立するような a，b の値が存在すれば，$a+b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$ である。

第２講　PART3　確認問題

1　$a>0$，$b>0$，$a \fallingdotseq b$ のとき

$$a+b,\ \sqrt{ab},\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

の大小を比較せよ。

[ア] ＜ [イ] ＜ [ウ]

①　$a+b$　　②　$\sqrt{ab}$　　③　$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

2　$x>1$ のとき，$x-10+\dfrac{9}{x-1}$ の最小値を求めよ。

$x=$ [エ] のとき　最小値 [オカ]

第 3 講　複素数と方程式

PART1　複素数と式の値，解と係数の関係

1　[1]　$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^2-2x+4，$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ の値を求めよ。

[2]　2 次方程式 $2x^2-8x-3=0$ の 2 つの解を α，β とする。

(i)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

(ii)　$\alpha-3$，$\beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

Point Pickup

[1]　多項式の式の値を求める際に，割り算の結果を用いる等により，値を求めたい式の次数を下げることで，計算を簡単にすることができる。

[2]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ である。

また，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，α，β は 2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の 2 つの解である。

第 3 講　PART1　確認問題

1　$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，

x^2-4x+7，

$x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56$

の値を求めよ。

$x^2-4x+7=$ ア

$x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56$

$=$ イ $+$ ウ $\sqrt{\text{エ}}\,i$

2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする。

2　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=$ オ

3　$\alpha+1$，$\beta+1$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

$2x^2-$ カ $x+$ キ $=0$

PART2　３次方程式の解から係数の決定

2　３次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ の１つの解が $1+2i$ であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。ただし，a，b は実数とする。

Point Pickup

与えられた解を方程式に代入し，複素数の相等条件

A，B が実数のとき　$A+Bi=0 \iff A=0$ かつ $B=0$

を利用して，方程式の係数を決定し，他の解を求める。

実数係数の n 次方程式が虚数 $a+bi$ を解にもつならば，その共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である。これを利用し，３次方程式の解と係数の関係

３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の３つの解を α，β，γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

を利用して，方程式の係数および他の解を求めることができる。

また，与えられた方程式の左辺が $x-(a+bi)$，$x-(a-bi)$ を因数にもつことから，左辺を $\{x-(a+bi)\}\{x-(a-bi)\}$ で割った余りを求め，その余りを０とする方法がある。

第 3 講　PART2　確認問題

1　3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ の 1 つの解が $3-2i$ であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。ただし，a，b は実数とする。

$a=$ [アイ]，$b=$ [ウ]

他の解は [エオ]，[カ] $+$ [キ] i

PART3　x^2+x+1 と虚数立方根

3　(1)　a，b が実数，z が虚数のとき

$$a+bz=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

であることを証明せよ。

(2)　$P(x)=x^{11}$ とする。$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ。

Point Pickup

方程式 $x^2+x+1=0$ の解の１つを ω とすると，ω は虚数解であり

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$$

である。これを利用し，$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを，$P(\omega)$ の値から求めることができる。

第 3 講　PART3　確認問題

1 a，b が実数，z が虚数のとき

「$a+bz=0$」$\Longleftrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

であることを証明せよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

「$a=0$ かつ $b=0$」$\Longrightarrow$「$a+bz=0$」

は明らかに成り立つ。

「$a+bz=0$」$\Longrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

を示す。

［ア］……(＊)　と仮定すると，$a+bz=0$ より　$z=$［イ］

a，b が実数，z が虚数であるから，

$z=$［イ］の左辺は［ウ］，右辺は［エ］

となり，矛盾する。

よって，(＊)の仮定は誤りであるから　$b=$［オ］

このとき，$a+bz=0$ より　$a=$［カ］

したがって，「$a+bz=0$」$\Longleftrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」である。

[［ア］の選択肢]

①　$b<0$　②　$b>0$　③　$b=0$

④　$b\neq 0$　⑤　b は実数　⑥　b は虚数

[［イ］の選択肢]

①　0　②　$-a$　③　$-b$　④　$-\dfrac{a}{b}$　⑤　$-\dfrac{b}{a}$

[［ウ］，［エ］の選択肢]

①　実数　②　虚数

2 $P(x)=2x^{20}+x^{10}$ とする。

$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを $ax+b$ とするとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。

$a=$ **キク**，$b=$ **ケコ**

[MEMO]

第 4 講　点と直線

PART1　２直線の交点を通る直線

1　２直線 $3x-2y+2=0$ …… ①，$2x+y-3=0$ …… ②の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-2,\ 1)$ を通る

(2)　直線 $5x-y-6=0$ と平行

(3)　直線 $4x-y-1=0$ と垂直

Point Pickup

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1) \iff y=m(x-x_1)+y_1$$

２直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点を通る直線は

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad (k \text{ は実数})$$

２直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ が

平行 $\iff$ $m_1=m_2$

垂直 $\iff$ $m_1m_2=-1$

２直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ が

平行 $\iff$ $a_1b_2-a_2b_1=0$ $\iff$ $a_1:b_1=a_2:b_2$

垂直 $\iff$ $a_1a_2+b_1b_2=0$

第４講　PART1　確認問題

2 直線

$5x-2y-6=0$ …… ①

$x+y-4=0$ …… ②

の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を $y=ax+b$ とするとき，定数 a, b の値を求めよ。

1 点 $(1,\ -1)$ を通る

$a=$ [ア], $b=$ [イウ]

2 直線 $3x+2y+3=0$ と平行

$a=\dfrac{[エオ]}{[カ]}$, $b=$ [キ]

3 直線 $2x-y+1=0$ と垂直

$a=\dfrac{[クケ]}{[コ]}$, $b=$ [サ]

PART2　線対称の点，折れ線の長さの最小値

2　直線 l: $y=2x-3$ と点 A(5, 2) がある。次の問いに答えよ。

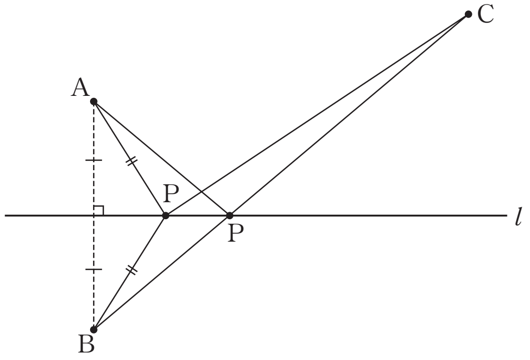
(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ。

(2)　点 P が直線 l 上を動くとき，AP の最小値を求めよ。また，点 C(6, 6) に対して，AP+PC が最小となる点 P の座標を求めよ。

Point Pickup

直線 l に関して 2 点 A，B が対称　$\iff$　$AB \perp l$　かつ　線分 AB の中点は直線 l 上

直線 l に関して点 A と対称な点 B をとる。このとき，直線 l 上の任意の点 P について，AP ＝ BP である。
よって，2 点 A，C が直線 l に関して同じ側にあるとき，AP+PC が最小になるのは，BP+PC が最小となるとき，すなわち 3 点 B，P，C が一直線上にあるときである。



第 4 講　PART2　確認問題

1　直線 $l: y=\frac{1}{2}x+2$ と点 A(1, 5) がある。

(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ。

B(ア , イ)

(2)　直線 l 上を動く点を P とする。

(i)　AP の最小値を求めよ。

$\sqrt{\boxed{ウ}}$

(ii)　点 C(6, 10) に対して，AP+PC が最小となる点 P の座標を求めよ。

P(エ , オ)

PART3　三角形の面積，三角形の外心の座標

3　△ABC で，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L(4，−1)，M(−1，1)，N(−2，−5) とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　直線 AB の方程式，および点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

(3)　△ABC の外心の座標を求めよ。

Point Pickup

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 点 O(0，0)，A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を頂点とする △OAB の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

三角形の外心は，各辺の垂直二等分線の交点

第４講　PART3　確認問題

△ABC において，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L$(-2,\ 2)$，M$(1,\ 0)$，N$(0,\ 3)$ とする。

1　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

A(ア , イ)，B(ウエ , オ)，
C(カキ , クケ)

2　点 B から直線 AC に下ろした垂線の長さ d と，△ABC の面積を求めよ。

$d=\dfrac{\boxed{コサ}}{\sqrt{\boxed{シ}}}$，△ABC$=\boxed{スセ}$

3　△ABC の外心の座標を求めよ。

$\left(\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}},\ \dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}\right)$

第 5 講　円

PART1　円と直線，円の弦の長さ

1　点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C と，点 $(0,\ -1)$ を通る傾き m の直線 l がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l が円 C と共有点をもつような m の値の範囲を求めよ。

(2)　直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，m の値を求めよ。

Point Pickup

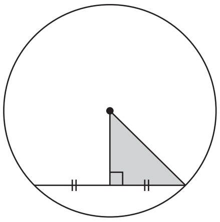
円と直線の位置関係は，円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式 D の符号，または円の中心と直線の距離 d と円の半径 r の大小関係を調べることでわかる。

①　$D>0 \iff d<r \iff$ 異なる 2 点で交わる

②　$D=0 \iff d=r \iff$ 接する

③　$D<0 \iff d>r \iff$ 共有点をもたない

円の弦の長さに関しては，円の中心から弦に下ろした垂線がその弦を 2 等分することを利用し，三平方の定理を適用するとよい。



第 5 講　PART1　確認問題

点 $(-2,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 C と，点 $(0,\ 1)$ を通る傾き m の直線 l がある。

1　直線 l と円 C が共有点をもつような m の値の範囲を求めよ。

[ア]

① $-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \leqq m \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

② $m \leqq -\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3} \leqq m$

③ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \leqq m \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

④ $m \leqq \dfrac{1-\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \leqq m$

⑤ $\dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \leqq m \leqq \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

⑥ $m \leqq \dfrac{2-\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \leqq m$

2　直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが 2 であるとき，m の値を求めよ。

$m =$ [イ], $\dfrac{[ウ]}{[エ]}$

PART2　円の接線，２円の交点を通る図形

2　［1］　点 $(1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

［2］　円 $(x-1)^2+y^2=5$ と，中心 $(a,\ b)$，半径１の円の２つの共有点を通る直線の方程式が $x-y+2=0$ である。このとき，$(a,\ b)$ を求めよ。

Point Pickup

［1］　円外の点から引いた接線の方程式は

①　円の中心と接線の距離が半径と等しいことを利用する

②　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおき，接線の公式を利用する

のいずれかの方法を用いて求めるとよい。

［2］　x，y を含む２つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る曲線は

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0\quad (k\ は実数)$$

第 5 講　PART2　確認問題

1　点 $(-1,\ 2)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

$$x=\boxed{アイ},\quad \boxed{ウ}x+\boxed{エ}y-\boxed{オ}=0$$

2　円 $x^2+(y-2)^2=4$ と，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 3 の円がある。これらの円の 2 つの共有点を通る直線の方程式が $6x+2y+1=0$ であるとき，$(a,\ b)$ を求めよ。

$$(a,\ b)=\left(\boxed{カキ},\ \boxed{ク}\right),\ \left(\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}},\ \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\right)$$

PART3　2円の位置関係，2円の共通弦

3　2円 C_1 ：$x^2+y^2=1$，C_2 ：$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2\ (r>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　2円が異なる2点で交わるときの r のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，2円の共通弦の長さが最大となるときの r の値と，そのときの共通弦の長さを求めよ。

Point Pickup

2円の位置関係は,2円の半径 r, r' と中心間の距離 d の大小関係により調べることができる。

異なる2点で交わる　$\Longleftrightarrow$　$|r-r'|<d<r+r'$

円の弦の長さが最大になるのは，弦が円の中心を通るとき，すなわち弦が円の直径となるときである。

第5講　PART3　確認問題

1　2つの円

$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2=4$

$C_2 : x^2+y^2=r^2 \ (r>0)$

について，次の問いに答えよ。

(1)　円 C_1 と C_2 が異なる2点で交わるとき，定数 r のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{ア}} < r < \boxed{\text{イ}}$

(2)　(1)のとき，円 C_1 と C_2 の共通弦の長さの最大値を求めよ。また，そのときの r の値を求めよ。

$r=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ のとき　最大値 $\boxed{\text{オ}}$

第 6 講　軌跡

PART1　定点からの距離が一定，媒介変数と軌跡

1　[1]　点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が $2:1$ であるという。点Pの軌跡を求めよ。

[2]　放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする。$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの軌跡を求めよ。

Point Pickup

[1]　点Pの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x，y の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

[2]　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x，y それぞれが変数 a（媒介変数）で表されるとき，a を消去して x，y の関係式を導くことで，点Pの軌跡を求めることができる。媒介変数のとりうる値の範囲に注意。

第 6 講　PART1　確認問題

1　点Ｐから２つの円

$x^2+y^2=2$,

$x^2+(y-4)^2=1$

それぞれに引いた接線の長さの比が３：１であるとき，点Ｐの軌跡を求めよ。

中心が $\left(\boxed{ア}, \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)$，半径が $\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ の円

2　放物線 $y=-x^2-(2a-6)x+a^2+a-1$ の頂点をＰとする。$-1<a\leqq 1$ のとき，頂点Ｐの軌跡を求めよ。

放物線 $y=\boxed{キ}x^2-\boxed{ク}x+\boxed{ケコ}$ の $\boxed{サ}$ の部分

[$\boxed{サ}$ の選択肢]

① $-4<x\leqq -2$　　② $-4\leqq x<-2$

③ $-1<x\leqq 1$　　④ $-1\leqq x<1$

⑤ $2<x\leqq 4$　　⑥ $2\leqq x<4$

PART2　動点と軌跡

2　点 P が円 $x^2+y^2-4x=0$ 上を動くとき，3 点 A(0，0)，B(2，−2)，P を頂点とする三角形 ABP の重心 G の軌跡を求めよ。

Point Pickup

曲線上を動く点に応じて，軌跡を求めたい点が動くときは，以下の手順で軌跡を求める。

① 曲線上の点を $(s,\ t)$，軌跡を求める点を $(x,\ y)$ とする。

② x，y を，それぞれ s，t を用いて表す。

③ ②の式より，s，t を x，y を用いて表す。

④ $(s,\ t)$ が曲線上の点であることから，③の式を，曲線を表す方程式に代入する。

⑤ ④より得られる x，y の関係式が表す図形を求める。曲線上の点において，問題の条件を満たさないものがある場合は，②(③)の式を用いて，求めた図形から除外する点を求める。

第６講　PART2　確認問題

1　点Pが円 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 上を動くとき，３点 A(0, 0)，B(2, 2)，Pを頂点とする △ABP の重心Gの軌跡を求めよ。

中心が（[ア]，[イ]），半径が $\frac{\sqrt{[ウ]}}{[エ]}$ の円

ただし，[オ] を除く。

[[オ] の選択肢]

① 点 (0, 0)　　② 点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

③ 点 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$　　④ ２点 (0, 0)，$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

⑤ ２点 (0, 0)，$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$　　⑥ ２点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

PART3　放物線の弦の中点の軌跡

3　放物線 $C：y=x^2$ と直線 $l：y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C と l が異なる 2 点 A，B で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

Point Pickup

(2)　放物線や円と傾き m の直線が異なる 2 交点をもつとき，m を定めることで，2 交点の座標が決定し，それにより中点 P が決定する。ただし，必ずしも 2 交点の座標をそれぞれ m で表す必要はない。特に，放物線と直線の 2 交点，円と直線の 2 交点に関しては，2 交点の x 座標を α，β とおき，解と係数の関係の利用を検討するとよい。

第6講　PART3　確認問題

1　放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $l: y=mx-1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 l が異なる2点A，Bで交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

　　[ア]

(2)　(1)のとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

　　放物線 [イ] の [ウ] の部分

[[ア] の選択肢]

① $m>2$　② $m>\sqrt{2}$

③ $m<-2$，$2<m$　④ $m<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<m$

⑤ $-2<m<2$　⑥ $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

[[イ] の選択肢]

① $y=x^2$　② $y=x^2-1$

③ $y=\frac{1}{2}x^2$　④ $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

⑤ $y=2x^2$　⑥ $y=2x^2-2$

[[ウ] の選択肢]

① $x<-2$，$2<x$　② $-2<x<2$

③ $x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$　④ $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

⑤ $x<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<x$　⑥ $-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$

第 7 講　領域

PART1　領域を利用した証明

1　$|x|+|y| \leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4) \geqq 0$ が成り立つことを証明せよ。

Point Pickup

不等式 $AB>0$ が表す領域は 連立不等式 $\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$ の表す領域である。

不等式 $AB<0$ が表す領域は 連立不等式 $\begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$ の表す領域である。

条件 p が表す領域を P，条件 q が表す領域を Q とすると

「命題 $p \Longrightarrow q$ が真」 $\Longleftrightarrow$ 「$P \subset Q$」

である。これを利用して，領域 P，Q を図示し，包含関係を用いて命題が真であることを示す方法がある。

第 7 講　PART1　確認問題

1　x, y は実数とする。次のことを証明せよ。

$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ ならば $|x|+|y|>2$

（証明）

不等式 $(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$, $|x|+|y|>2$ の

表す領域を，それぞれ P, Q とする。

領域 P は [ア],　　領域 Q は [イ]

それぞれの斜線部分である。ただし，いずれも境界線を含まない。

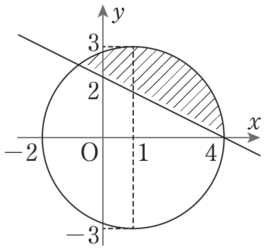
したがって，[ウ] が成り立つ。

よって，$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ ならば

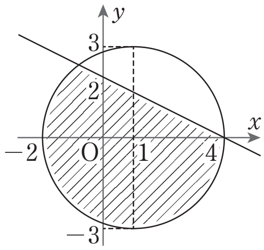
$|x|+|y|>2$ である。

[ア の選択肢]

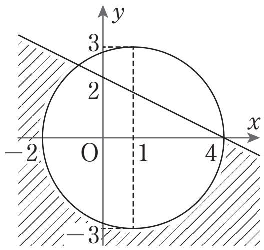
①



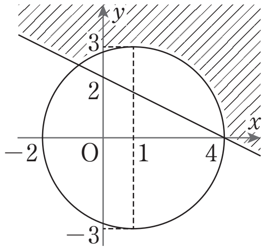
②



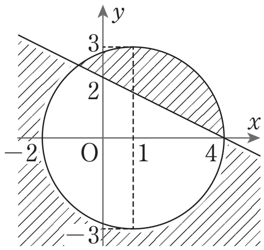
③



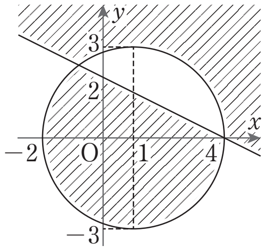
④



⑤

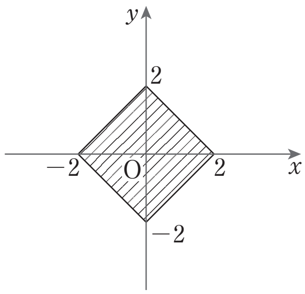


⑥

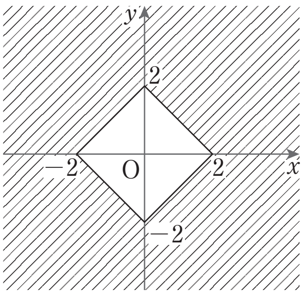


[イ の選択肢]

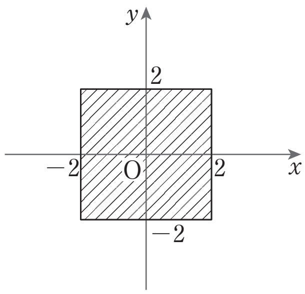
①



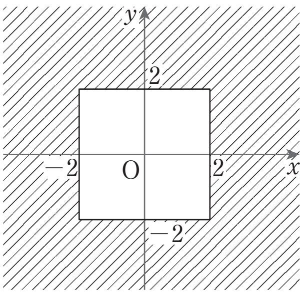
②



③



④



[ウ の選択肢]

①　$P \subset Q$　　　②　$Q \subset P$

PART2　領域と最大・最小

2　実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

Point Pickup

条件として与えられた連立不等式の表す領域 D を図示し，最大値や最小値を求めたい式を $f(x,\ y)=k$ とおいて，$f(x,\ y)=k$ が表す図形が領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値や最小値を求める。

第 7 講　PART2　確認問題

1　実数 x，y が，

$$x^2+y^2 \leqq 20,$$

$$y \leqq x-2\sqrt{5}$$

を満たすとき，$x-2y$ の最大値と最小値を求めよ。

$x=$ [ア]，$y=$ [イウ] のとき　最大値　[エオ]

$x=$ [カ]$\sqrt{[キ]}$，$y=$ [ク] のとき

最小値　[ケ]$\sqrt{[コ]}$

PART3　正領域・負領域

3　[1]　2点を A$(-2,\ -1)$, B$(3,\ 2)$ とする。線分 AB が直線 $y=ax+1$ と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[2]　放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の任意の点を P，直線 $y=-2x+6$ 上の任意の点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

Point Pickup

曲線 $f(x,\ y)=0$ に対し，$f(x,\ y)>0$ となる領域を「正領域」，$f(x,\ y)<0$ となる領域を「負領域」という。

[1]　直線 l：$f(x,\ y)=0$ と線分 AB が交わらない

$\Longleftrightarrow$　2点 A，B がともに正領域 $f(x,\ y)>0$ にあるか，または
ともに負領域 $f(x,\ y)<0$ にある

[2]　点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

点 $(x_1,\ y_1)$ が $ax+by+c>0$ が表す領域にあるとき

$|ax_1+by_1+c|=ax_1+by_1+c$

点 $(x_1,\ y_1)$ が $ax+by+c<0$ が表す領域にあるとき

$|ax_1+by_1+c|=-(ax_1+by_1+c)$

第 7 講　PART3　確認問題

1　2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(3,\ -1)$ がある。線分 AB が直線 $y=a(x+3)$ と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

ア

① $a<-\frac{1}{6},\ 3<a$　② $-\frac{1}{6}<a<3$

③ $a<-3,\ \frac{1}{6}<a$　④ $-3<a<\frac{1}{6}$

⑤ $a<\frac{1}{6},\ 3<a$　⑥ $\frac{1}{6}<a<3$

2　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 上の任意の点を P，直線 $y=-\frac{3}{4}x-1$ 上の任意の点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

最小値 $\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$

第 8 講　三角関数のグラフ，方程式・不等式

PART1　三角関数のグラフ

1　［1］　関数 $y=3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期を求め，そのグラフをかけ。

［2］　方程式 $\sin\left(2x-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数をグラフを用いて求めよ。

Point Pickup

［1］　$y=a\sin\theta$ $(a>0)$ のグラフ … $y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に a 倍したもの

$y=\sin k\theta$ $(k>0)$ のグラフ … $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ 倍したもの

$y=\sin(\theta-p)$ のグラフ … $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に p だけ平行移動したもの

［2］　三角関数を含む方程式 $\sin\theta=t$ の解 θ の個数は，$y=\sin\theta$ のグラフと直線 $y=t$ の共有点の個数を考えるとよい。

第 8 講　PART1　確認問題

1　関数 $y=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ の周期を求め，グラフをかけ。

周期は　ア

グラフは，　イ　の実線部分。ただし，選択肢の各図において，$y=\sin\theta$ のグラフを破線で示している。

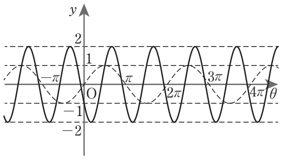
[ア の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑤ π

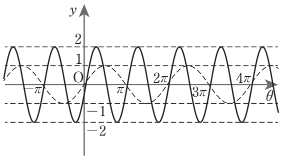
⑥ $\dfrac{3}{2}\pi$　⑦ 2π　⑧ 3π　⑨ 4π

[イ の選択肢]

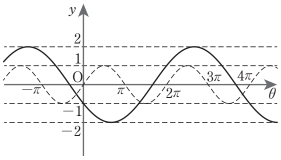
①



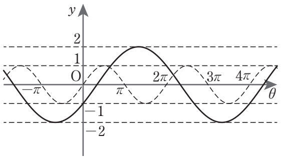
②



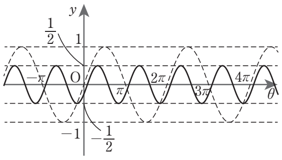
③



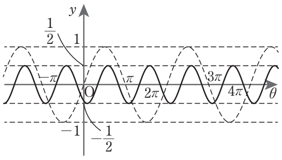
④



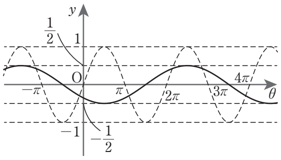
⑤



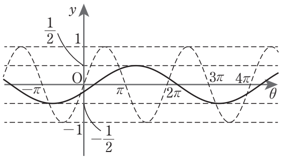
⑥



⑦

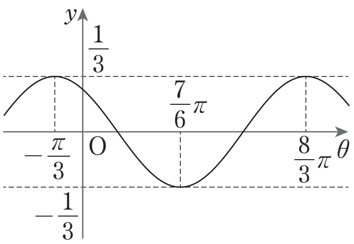


⑧



2 次の関数①～⑥のうち，そのグラフが下図のようになるものを 1 つ選べ。

ウ



① $y=\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{2}{3}\theta-\dfrac{2}{9}\pi\right)$　② $y=\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{2}{3}\theta+\dfrac{2}{9}\pi\right)$

③ $y=\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{3}{2}\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$　④ $y=\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{3}{2}\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$

⑤ $y=3\cos\left(\dfrac{3}{2}\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$　⑥ $y=3\cos\left(\dfrac{2}{3}\theta+\dfrac{2}{9}\pi\right)$

3 方程式 $\cos\left(3x+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数を，グラフを用いて求めよ。

エ 個

[MEMO]

PART2　三角関数を含む方程式・不等式

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{3}$　　(4)　$5\cos\theta-2\sin^2\theta+4 > 0$

Point Pickup

・例えば(1)において，$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと，$\sin t=-\dfrac{1}{2}$ となる。

これを満たす t の値を，t のとりうる値の範囲，すなわち $\theta-\dfrac{\pi}{3}$ の範囲において求める。

・複数の三角関数で表された式は，1 種類の三角関数で表すとよい。

第8講　PART2　確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

1 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}\pi,\ \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}}\pi$

2 $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{1}{2}$

$\boxed{ク} \leqq \theta < \boxed{ケ},\ \boxed{コ} < \theta < \boxed{サ},$

$\boxed{シ} < \theta < \boxed{ス}$

（ただし，$\boxed{コ} < \boxed{シ}$）

① 0　② $\dfrac{5}{24}\pi$　③ $\dfrac{7}{24}\pi$　④ $\dfrac{\pi}{3}$

⑤ $\dfrac{23}{24}\pi$　⑥ $\dfrac{29}{24}\pi$　⑦ $\dfrac{31}{24}\pi$　⑧ $\dfrac{4}{3}\pi$

⑨ $\dfrac{47}{24}\pi$　⑩ 2π

3 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{セ} \leqq \theta \leqq \boxed{ソ},\ \boxed{タ} < \theta \leqq \boxed{チ},$

$\boxed{ツ} < \theta < \boxed{テ}$

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑥ π　⑦ $\dfrac{4}{3}\pi$　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi$

⑨ $\dfrac{11}{6}\pi$　⑩ 2π

4 $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

$\theta =$ ト, $\dfrac{\pi}{ナ}$, $\dfrac{ニ}{ヌ}\pi$

5 $2\cos^2\theta + \sin\theta - 2 > 0$

ネ $< \theta <$ ノ, ハ $< \theta <$ ヒ

（ただし，ネ $<$ ハ）

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑥ π　⑦ $\dfrac{4}{3}\pi$　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi$

⑨ $\dfrac{11}{6}\pi$　⑩ 2π

[MEMO]

PART3　三角関数を含む方程式の解が存在する条件

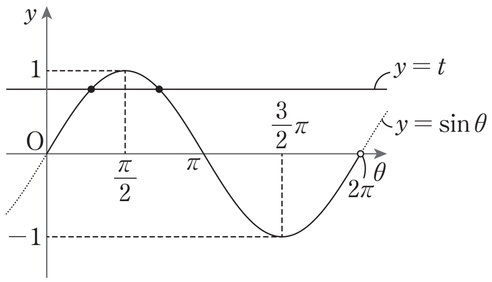
3　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　θ の方程式 $\sin\theta = t$ を満たす θ が存在するような定数 t の値の範囲を求めよ。

(2)　θ の方程式 $\sin\theta - \cos^2\theta = a$ を満たす θ が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

(1)　θ の方程式 $\sin\theta = t$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を満たす θ が存在するのは，$y = \sin\theta$ のグラフと直線 $y = t$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ において共有点をもつときである。



(2)　$\sin\theta = t$ とおくと，θ が存在するのは，(1)より $-1 \leqq t \leqq 1$ のときである。
したがって，t の方程式が $-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつときの条件を考える。

第 8 講　PART3　確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

1　θ の方程式 $\cos\theta = t$ を満たす θ が存在するような定数 t の値の範囲を求めよ。

ア

①　$0 \leqq t \leqq 1$　　②　$0 < t < 1$

③　$-1 \leqq t \leqq 0$　　④　$-1 < t < 0$

⑤　$-1 \leqq t \leqq 1$　　⑥　$-1 < t < 1$

2　θ の方程式 $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = a$ を満たす θ が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

イ

①　$-2 \leqq a \leqq 0$　　②　$-2 \leqq a \leqq 1$

③　$-2 \leqq a \leqq \dfrac{9}{8}$　　④　$0 \leqq a \leqq 1$

⑤　$0 \leqq a \leqq \dfrac{9}{8}$　　⑥　$1 \leqq a \leqq \dfrac{9}{8}$

第 9 講　加法定理

PART1　三角関数を含む方程式・不等式（2倍角の公式）

1　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos x + \sin 2x = 0$

(2)　$\cos x - 3\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} + 4 > 0$

Point Pickup

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

を用いて，三角関数の角を揃えるとよい。

2倍角の公式を用いることで，角が半分の三角関数で表すことができる。

第9講　PART1　確認問題

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

1 $\sin x - \sin\frac{x}{2} = 0$

$x =$ ア，$\frac{イ}{ウ}\pi$

2 $\cos 2x - \sqrt{2}\cos x - 1 \geqq 0$

エ $\leqq x \leqq$ オ

① 0　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{2}$

⑤ $\frac{3}{4}\pi$　⑥ $\frac{5}{6}\pi$　⑦ π　⑧ $\frac{5}{4}\pi$

⑨ $\frac{3}{2}\pi$　⑩ $\frac{11}{6}\pi$

PART2　三角関数の媒介変数表示

2　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t\ (t\neq\pm1)$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(3)　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

Point Pickup

２倍角の公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

および，三角関数の相互関係を利用することで証明できる。

第 9 講　PART2　確認問題

1 $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ $(t \neq \pm 1)$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

（証明）

(1)　$\tan\theta=\tan 2\cdot\boxed{ア}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2)　$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\boxed{エ}}$ より

$$\boxed{エ}=\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって

$$\cos\theta=\cos 2\cdot\boxed{オ}=\boxed{カ}=2\cdot\boxed{キ}-1$$

$$=\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(3)　(1)，(2)より

$$\sin\theta=\boxed{ク}=\frac{2t}{\boxed{ケ}}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

[$\boxed{ア}$，$\boxed{オ}$ の選択肢]

①　θ　　②　$\dfrac{\theta}{2}$　　③　$(-\theta)$　　④　$(\pi-\theta)$

[イ の選択肢]

① $\tan\theta$　② $2\tan\theta$　③ $\tan^2\theta$

④ $\tan\dfrac{\theta}{2}$　⑤ $2\tan\dfrac{\theta}{2}$　⑥ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

[ウ の選択肢]

① $1+2\tan\theta$　② $1+2\tan\dfrac{\theta}{2}$　③ $1+\tan^2\theta$

④ $1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}$　⑤ $1-2\tan\theta$　⑥ $1-2\tan\dfrac{\theta}{2}$

⑦ $1-\tan^2\theta$　⑧ $1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

[エ の選択肢]

① $\sin^2\theta$　② $\sin^2\dfrac{\theta}{2}$　③ $\cos^2\theta$　④ $\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

[カ の選択肢]

① $2\sin^2\dfrac{\theta}{2}-1$　② $1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

③ $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$　④ $1-2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

[キ の選択肢]

① $\dfrac{1}{1+t^2}$　② $\dfrac{1}{1-t^2}$　③ $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

④ $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$　⑤ $\dfrac{2t}{1-t^2}$　⑥ $\dfrac{2t}{t^2-1}$

[ク の選択肢]

① $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$　② $\dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$　③ $\tan\theta\cos\theta$

④ $\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$　⑤ $\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$　⑥ $\tan\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

[ケ の選択肢]

① $1+t$　② $1-t$　③ $t-1$

④ $1+t^2$　⑤ $1-t^2$　⑥ t^2-1

PART3　3倍角の公式とその利用

3　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ が成り立つことを示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき $5\theta=\pi$ であることに注目して証明する。

(2)　$3\theta=2\theta+\theta$ であることに注目し，加法定理を用いて3倍角の公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

を証明する。また，この公式と(1)の結果から，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求める。

第 9 講　PART3　確認問題

1　次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ のとき，$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の値を求めよ。

(1)　(証明)

$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ より　$5\theta=2\pi$

ゆえに　$3\theta=2\pi-$ \[ア\] θ

よって　$\sin 3\theta=\sin\left(2\pi-\right.$ \[ア\] $\left.\theta\right)=$ \[イ\]

したがって　$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$

(2)　(証明)

$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)$

$=$ \[ウ\] $\cos\theta+$ \[エ\] $\sin\theta$

$=2\sin\theta$ \[オ\] $+\left(1-2\right.$ \[カ\] $\left.\right)\sin\theta$

$=2\sin\theta\left(1-\right.$ \[キ\] $\left.\right)+\sin\theta-2$ \[ク\]

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(3)　$\cos\dfrac{2}{5}\pi=$ \[ケ\]

[\[イ\] の選択肢]

①　$\sin 2\theta$　　②　$-\sin 2\theta$

③　$\cos 2\theta$　　④　$-\cos 2\theta$

[ウ ～ ク の選択肢]

① $\sin\theta$　② $\cos\theta$

③ $\sin 2\theta$　④ $\cos 2\theta$

⑤ $\sin^2\theta$　⑥ $\cos^2\theta$

⑦ $\sin^3\theta$　⑧ $\cos^3\theta$

[ケ の選択肢]

① $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　② $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

③ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$　④ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

⑦ $\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　⑧ $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【MEMO】

第 10 講　三角関数の合成と最大・最小

PART1　三角関数の最大・最小（合成）

1　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

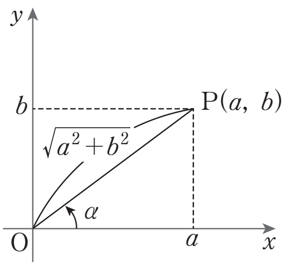
(2)　$y=3\sin\theta+4\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

Point Pickup

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ に加法定理を適用する。

(2)　$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の α が具体的な数値で表せないときは，α などの文字を用いて表し，ただし書きで α に関する説明を添える。

第10講　PART1　確認問題

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

1　$y=6\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$

最大値　$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，最小値　$\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$

2　$y=\sqrt{33}\sin\theta+4\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

最大値　$\boxed{オ}$，最小値　$\boxed{カ}$

PART2　三角関数の最大・最小（$t=\sin\theta-\cos\theta$）

2　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$y=\sin 2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。

Point Pickup

$\sin\theta+\cos\theta$ や $\sin\theta-\cos\theta$ を t とおき，両辺を2乗すると，$\sin\theta\cos\theta$ が式に現れ，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いることで，$\sin\theta\cos\theta$ を t で表すことができる。このとき t のとり得る値の範囲に注意。

第10講　PART2　確認問題

1　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

$\sin\theta\cos\theta=$ [ア]

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

[イ]

(3)　$y=4\sin\theta-4\cos\theta-2\sin 2\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。

最大値 [ウ]，最小値 [エオ]

[[ア] の選択肢]

① $\dfrac{t}{2}$　② $\dfrac{t+1}{2}$　③ $\dfrac{t-1}{2}$

④ $\dfrac{1-t}{2}$　⑤ $\dfrac{t^2}{2}$　⑥ $\dfrac{t^2+1}{2}$

⑦ $\dfrac{t^2-1}{2}$　⑧ $\dfrac{1-t^2}{2}$

[[イ] の選択肢]

① $-\sqrt{2} \leqq t \leqq 0$　② $-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$

③ $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$　④ $-1 \leqq t \leqq 0$

⑤ $-1 \leqq t \leqq 1$　⑥ $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

⑦ $0 \leqq t \leqq 1$　⑧ $0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

PART3　三角関数の最大・最小（2 倍角・半角の公式）

3　$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x\ (0 \leqq x < \pi)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

Point Pickup

2 倍角・半角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \iff \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \iff \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 \iff \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

を用いて，関数を $\sin 2x$，$\cos 2x$ の 1 次式で表す。

第10講　PART3　確認問題

1　$y=2\sqrt{3}\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x\ \ (0\leqq x<\pi)$ の

最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$x=$ ア のとき　最大値 $\dfrac{\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$

$x=$ オ のとき　最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$

[ア，オ の選択肢]

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{4}$　④ $\dfrac{\pi}{3}$

⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑦ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑧ $\dfrac{5}{6}\pi$

第 11 講　指数の拡張，指数関数

PART1　指数の計算と式の値

1　(1)　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$a+a^{-1}$，$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

(2)　$3^x=5^y=\sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　指数法則および対称式の考え方を用いて式の値を求める。

とくに，$a>0$ のとき　$a^p\cdot a^{-p}=1$

(2)　$a>0$，$b>0$，$a\neq1$，$b\neq1$，$x\neq0$ のとき　$a^x=b \iff a=b^{\frac{1}{x}}$

$a>0$，$a\neq1$ のとき　$p=q \iff a^p=a^q$

第11講　PART1　確認問題

1　$a>0$，$a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=3$ のとき，$a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$，$a+a^{-1}$ の値を求めよ。

$$a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\text{ア}},\quad a+a^{-1}=\boxed{\text{イウ}}$$

2　$2^x=5^y=10^{\frac{3}{2}}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

PART2　指数関数を含む方程式・不等式

2　［1］　次の方程式を解け。

(1)　$5^{2x+1}+4\cdot5^{x}-1=0$　　(2)　$3^{x}+3^{-x}=2$

［2］　次の不等式を解け。

(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$　　(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-\frac{12}{3^{x}}+27<0$

Point Pickup

［1］　底を揃えて，指数の性質

$a>0$，$a\neq1$ のとき　$p=q \iff a^{p}=a^{q}$

を利用する。$a^{x}>0$ であることに注意。

［2］　底を揃えて，指数の大小に関する性質

$a>1$ のとき　$p<q \iff a^{p}<a^{q}$

$0<a<1$ のとき　$p<q \iff a^{p}>a^{q}$

を利用する。$a^{x}>0$ であることに注意。

第11講　PART2　確認問題

次の方程式，不等式を解け。

1 $3\cdot 16^{x}-4^{x+1}-4=0$

$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2 $5^{x}-5^{1-x}=4$

$x=\boxed{ウ}$

3 $3^{2x+1}-4\cdot 3^{x}+1\leqq 0$

$\boxed{エ}$

① $x\leqq -1$　② $x\leqq 0$　③ $x\leqq 1$

④ $x\geqq -1$　⑤ $x\geqq 0$　⑥ $x\geqq 1$

⑦ $-1\leqq x\leqq 0$　⑧ $0\leqq x\leqq 1$

⑨ $-1\leqq x\leqq 1$

4 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}-11\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}-20>0$

$\boxed{オ}$

① $x<-2$　② $x<-1$　③ $x<2$

④ $x>-2$　⑤ $x>-1$　⑥ $x>2$

⑦ $-2<x<-1$　⑧ $-1<x<2$

⑨ $-2<x<2$

PART3　累乗根の大小，指数関数の最大・最小

3　[1]　$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[5]{5}$ の大小を比較せよ。

[2]　関数 $y=4^x-2^{x+3}+4$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ。

Point Pickup

[1]　底が異なる累乗根の大小は，$a>0$，$b>0$，n が自然数のとき

$$a<b \iff a^n<b^n$$

であることを利用するとよい。

[2]　$2^x=t$ とおくと，与えられた関数は t の２次関数となる。t のとり得る値の範囲に注意。

第11講　PART3　確認問題

1　$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[7]{7}$ の大小を比較せよ。

$\boxed{ア} < \boxed{イ} < \boxed{ウ}$

① $\sqrt[3]{2}$　② $\sqrt[6]{3}$　③ $\sqrt[7]{7}$

2　関数 $y=\dfrac{1}{2}\cdot 16^x-2\cdot 4^x+3$ $\left(-3\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$x=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のとき　最大値 $\boxed{カキ}$

$x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のとき　最小値 $\boxed{コ}$

第 12 講　対数とその性質，対数関数

PART1　対数の計算と式の値

1　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)$ の値を求めよ。

Point Pickup

対数の性質 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ を用いて，値を求めたい式の対数を

・１つにまとめる

・分解する

のいずれかの方法で変形し，与えられた値を代入する。

必要に応じて，底の変換公式 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を用いる。

第12講　PART1　確認問題

1 $x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ のとき，

$\log_8\dfrac{1}{x}+\log_8\dfrac{1}{y}$，$\log_{2\sqrt{2}}(x^2-6xy+y^2)$ の値を求めよ。

$$\log_8\frac{1}{x}+\log_8\frac{1}{y}=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\log_{2\sqrt{2}}(x^2-6xy+y^2)=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

PART2　対数関数を含む方程式・不等式

2　[1]　次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x - \log_9 (x+2) = 0$　　(2)　$\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$

[2]　次の不等式を解け。

(1)　$\log_2 (3-x) \geqq \log_2 2x$　　(2)　$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3 < 0$

Point Pickup

[1]　底を揃えて，対数の性質

$a>0$，$a \neq 1$ のとき　$p=q \iff \log_a p = \log_a q$

を利用する。真数が正であることに注意。

[2]　底を揃えて，対数の大小に関する性質

$a>1$ のとき　$p<q \iff \log_a p < \log_a q$

$0<a<1$ のとき　$p<q \iff \log_a p > \log_a q$

を利用する。真数が正であることに注意。

第12講　PART2　確認問題

次の方程式，不等式を解け。

1　$\log_2(x+4)-\log_4(x+7)=1$

$x=$ ア

2　$\log_5 x-\log_x 25=1$

$x=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$，エオ

3　$\log_3(1-2x)\leqq\log_3(5-x)$

カ

① $x\leqq-4$　② $x<\dfrac{1}{2}$　③ $x<5$

④ $x\geqq-4$　⑤ $x>\dfrac{1}{2}$　⑥ $x>5$

⑦ $-4\leqq x<\dfrac{1}{2}$　⑧ $-4\leqq x<5$

⑨ $\dfrac{1}{2}<x<5$

4 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 3\log_{\frac{1}{4}} x^2 > 4$

　キ

① $x > \dfrac{1}{16}$　② $x > \dfrac{1}{2}$　③ $x > 16$

④ $0 < x < \dfrac{1}{16}$　⑤ $0 < x < \dfrac{1}{2}$

⑥ $0 < x < 16$　⑦ $\dfrac{1}{2} < x < 16$

⑧ $\dfrac{1}{16} < x < 16$　⑨ $0 < x < \dfrac{1}{2},\ 16 < x$

⑩ $0 < x < \dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{2} < x$

【MEMO】

PART3　対数の大小，対数関数の最大・最小

3　[1]　$\log_{\frac{1}{2}}3$，$\log_5 3$，$\log_7 3$，$\log_{\frac{1}{2}}5$ の大小を比較せよ。

[2]　次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)$ $(2\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$ $(0\leqq x\leqq 3)$

Point Pickup

[1]　$a>1$ のとき　$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$　　$0<p<1 \Longleftrightarrow \log_a p<0$

$0<a<1$ のとき　$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p<0$　　$0<p<1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$

であることを利用し，対数の正負で分類してから，底を揃えて大小比較をするとよい。

[2]　(1)　$\log_2 x=t$ とおくと，与えられた関数は t の 2 次関数となる。t のとり得る値の範囲に注意。

(2)　$a>1$ のとき

$$p<q \Longleftrightarrow \log_a p<\log_a q$$

であることから，真数が最大，最小になるときを考えればよい。

第12講　PART3　確認問題

1　$\log_{0.3}5$，$\log_2 5$，$\log_3 5$，$\log_{0.3}3$ の大小を比較せよ。

ア ＜ イ ＜ ウ ＜ エ

①　$\log_{0.3}5$　　②　$\log_2 5$　　③　$\log_3 5$　　④　$\log_{0.3}3$

次の関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

2　$y=\left(\log_3 \dfrac{x^4}{9}\right)\left(\log_3 \dfrac{9\sqrt{3}}{x}\right)$　$(1 \leqq x \leqq 9)$

$x=$ オ$\sqrt{\text{カ}}$ のとき　最大値 キ

$x=$ ク のとき　最小値 ケコ

3　$y=\log_3(2x^2-8x+9)$　$(1 \leqq x \leqq 4)$

$x=$ サ のとき　最大値 シ

$x=$ ス のとき　最小値 セ

第 13 講　指数・対数関数の様々な問題

PART1　指数・対数と式の値

1　(1)　$16^{\log_2 3}$ の値を求めよ。

(2)　$2^x=3^y=12^z$，$xyz \neq 0$ のとき，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　$a>0$，$a \neq 1$ で，$M>0$ とするとき

$$a^p=M \Longleftrightarrow p=\log_a M$$

であるから，

$$a^{\log_a M}=M$$

(2)　$2^x=3^y=12^z$ の各辺の 2 を底とする対数をとる。

第13講　PART1　確認問題

1 $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log 5\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log 5\frac{3}{2}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

2 $2^x=3^y=5^z=\sqrt[3]{30}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\boxed{\text{ウ}}$$

PART2　常用対数

2 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

［1］ 18^{20} の桁数を求めよ。また，最高位の数字，および一の位の数字を求めよ。

［2］ (1) $(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁であるような整数 n の値の範囲を求めよ。

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

Point Pickup

正の数 N の整数部分が n 桁 $\iff$ $10^{n-1} \leqq N < 10^n$ $\iff$ $n-1 \leqq \log_{10} N < n$

また，正の数 N の最高位の数字は $\log_{10} N$ の小数部分に注目する。

第13講　PART2　確認問題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

1 12^{70} の桁数を求めよ。また，最高位の数字，および一の位の数字を求めよ。

桁数 [アイ]，　最高位 [ウ]，　一の位 [エ]

2 $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{20}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。また，その値を求めよ。

小数第 [オカ] 位，　その値は [キ]

3 $(1.5)^n$ の整数部分が 3 桁であるような整数 n の値の範囲を求めよ。

[クケ] $\leqq n \leqq$ [コサ]

4 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < \dfrac{1}{1000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

$n =$ [シ]

PART3　指数関数・対数関数の最大・最小

3　［1］　関数 $y=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})-3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，$t \geqq 2$ であることを示せ。

(2)　y を t を用いて表せ。また，y の最小値を求めよ。

［2］　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y+\log_y x$ の最小値を求めよ。

Point Pickup

［1］　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であり，$2^x \cdot 2^{-x}=1$ すなわち 2^x と 2^{-x} の積が一定値であることから，相加平均と相乗平均の大小関係を用いる。

［2］　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y>0$，$\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}>0$ であることから，相加平均と相乗平均の大小関係を用いて最小値を求める。

第13講　PART3　確認問題

1　関数 $y=9^x+9^{-x}-2(3^x+3^{-x})$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=3^x+3^{-x}$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

[ア]

(2)　y を t を用いて表せ。また，y の最小値を求めよ。

$y=$ [イ]，最小値 [ウエ]

[[ア]の選択肢]

①　$t>0$　②　$t\geqq 0$　③　$t<0$　④　$t\leqq 0$

⑤　$t>2$　⑥　$t\geqq 2$　⑦　$t<2$　⑧　$t\leqq 2$

[[イ]の選択肢]

①　t^2-2t　②　t^2+2t

③　t^2-2t-2　④　t^2+2t-2

⑤　t^2-2t-4　⑥　t^2+2t-4

2　$x>1,\ y>1$ のとき，$\log_x y^2+\log_y\sqrt{xy}$ の最小値を求めよ。

$\dfrac{[オ]}{[カ]}$

第14講　微分係数と導関数

PART1　平均変化率と微分係数

1　$f(x)=x^3-3x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x=1$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　$x=c$ から $x=c+h$ $(h\neq 0)$ まで変化するときの平均変化率を求め，その結果を用いて，$x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた微分係数が，(1)で求めた平均変化率と等しいとき，c の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　x の値が a から b まで変化するときの平均変化率は　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2)　x の値が c から $c+h(h\neq 0)$ まで変化するときの平均変化率は　$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$x=c$ における微分係数は　$f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

第 14 講　PART1　確認問題

1　$f(x)=-x^3+2x+3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x=1$ から $x=4$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

[アイウ]

(2)　$x=c$ から $x=c+h$ $(h \neq 0)$ まで変化するときの平均変化率を求め，その結果を用いて，$x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を求めよ。

平均変化率　[エ]

微分係数　$f'(c)=$ [オ]

(3)　(2)で求めた微分係数が，(1)で求めた平均変化率と等しいとき，c の値を求めよ。

$c=$ [カ]$\sqrt{[キ]}$

[[エ] の選択肢]

① c^2+ch+h^2+1　② c^2+ch+h^2+2
③ $-3c^2-3ch-h^2+1$　④ $-3c^2-3ch-h^2+2$
⑤ $3c^2+3ch+h^2+1$　⑥ $3c^2+3ch+h^2+2$

[[オ] の選択肢]

① $-c^3+2c+3$　② c^2+1　③ c^2+2
④ $-3c^2+1$　⑤ $-3c^2+2$　⑥ $3c^2+1$
⑦ $3c^2+2$

PART2　接線の方程式

2 (1) 曲線 $y=x^3-5x+1$ 上の点 A$(2,\ -1)$ における接線の方程式，および法線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(1,\ 8)$ から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ。また，求めた接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の座標を求めよ。

Point Pickup

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における

接線の方程式　$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

法線の方程式　$y=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$　　ただし　$f'(a)\neq 0$

(2) 接点の座標を $(a,\ f(a))$ とおき，接線の方程式を a を用いて表す。

第14講　PART2　確認問題

1　曲線 $y=-2x^3-x^2+1$ 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$ における接線の方程式，および法線の方程式を求めよ。

接線の方程式　$y=\boxed{アイ}x-\boxed{ウ}$

法線の方程式　$y=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}x+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$

2　点 $(2,\ 1)$ から曲線 $y=x^3-6x^2+6x+3$ に引いた接線の方程式を求めよ。また，求めた接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の座標を求めよ。

接線の方程式　$y=\boxed{クケ}x+\boxed{コ}$

接点以外の共有点の座標　$\left(\boxed{サ},\ \boxed{シス}\right)$

PART3　共通接線

3　[1]　2 つの放物線 $y=x^2-2x+2$, $y=-x^2+8x-11$ の共通接線の方程式を求めよ。

[2]　2 曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax-20$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。また，その接点における共通接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

2 つ以上の曲線に接する直線を「共通接線」という。

[1]　2 つの放物線の接線を，接点の x 座標をそれぞれ s, t として求める。2 つの接線が共通接線となるのは，2 つの接線が一致するときである。

[2]　2 曲線が点 A で接するのは，2 曲線が点 A を通り，かつ点 A における 2 曲線の接線が一致するときである。点 A の x 座標を α とすると，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が点 A で接する条件は

$$f(\alpha)=g(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

第 14 講　PART3　確認問題

1 2 つの放物線 $y=x^2-6x+13$，$y=-x^2+4x-4$ の共通接線の方程式を求めよ。

$y=$ [ア] $x-$ [イ]，$y=$ [ウエ] $x+$ [オカ]

2 2 曲線 $y=x^3+2x^2+1$ と $y=3x^2+px+4$ が接するとき，定数 p の値を求めよ。また，その接点における共通接線の方程式を求めよ。

$p=$ [キ]

共通接線の方程式　$y=$ [ク] $x+$ [ケ]

第 15 講　導関数の応用

PART1　関数の極大・極小

1　[1]　3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる。このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

[2]　(1)　関数 $f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(2)　関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ。

Point Pickup

[1]　関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとる $\Longrightarrow$ $f'(\alpha)=0$

この逆は成り立たない。すなわち，$f'(\alpha)=0$ であっても $f(\alpha)$ が極値になるとは限らない。

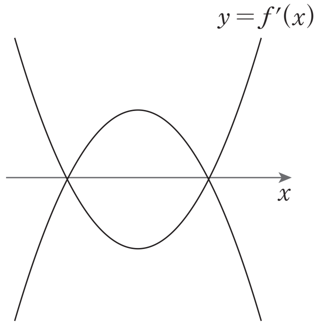
また，求めた値が極大，極小に関する条件を満たすかの確認が必要となる。

[2]　3 次関数 $f(x)$ が極値をもつ

$\Longleftrightarrow$　2 次関数 $f'(x)$ が正から負，または負から正に変わる点が少なくとも 1 つ存在する。

$\Longleftrightarrow$　2 次関数 $f'(x)$ が正から負に変わる点が存在すれば必ず負から正に変わる点も存在する。逆もいえる。

$\Longleftrightarrow$　2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。



第15講　PART1　確認問題

1　3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 2, $x=2$ で極大値 3 をとる。このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

$a=$ アイ，$b=$ ウ，$c=$ エオカ，$d=$ キ

2　関数 $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3+(a-3)x^2-(2a-3)x+1$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

ク

① $-3<a<1$　② $a<-3,\ 1<a$

③ $1<a<2$　④ $a<1,\ 2<a$

⑤ $-3<a<2$　⑥ $a<-3,\ 2<a$

3 関数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x$ の極値を求めよ。

$a>$ [ケ] のとき $x=$ [コ] で極大値 [サ]

$x=$ [シ] で極小値 [ス]

$a=$ [ケ] のとき 極値はない

$a<$ [ケ] のとき $x=$ [セ] で極大値 [ソ]

$x=$ [タ] で極小値 [チ]

[[コ], [シ], [セ], [タ] の選択肢]

① a　② $-a$　③ $3a$　④ $-3a$

⑤ $\dfrac{a}{3}$　⑥ $-\dfrac{a}{3}$　⑦ 0

[[サ], [ス], [ソ], [チ] の選択肢]

① a^3　② $-15a^3$　③ $33a^3$

④ $-\dfrac{5}{27}a^3$　⑤ $\dfrac{11}{27}a^3$　⑥ 0

[MEMO]

PART2　絶対値を含む関数のグラフ

2　関数 $y=x^3-3|x^2-1|-1$ のグラフをかけ。

Point Pickup

場合分けにより絶対値記号をはずし, 場合分け後の各関数について, 定義域に注意して増減を調べグラフをかく。

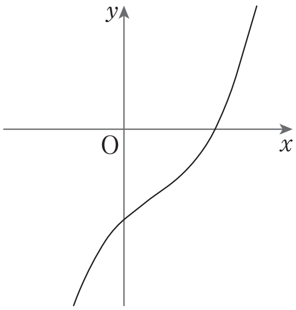
場合の分かれ目となる x の値においては y' が存在しないことがあるが, その前後で y' の符号が変化すれば, その点において極値をとる。

第 15 講　PART2　確認問題

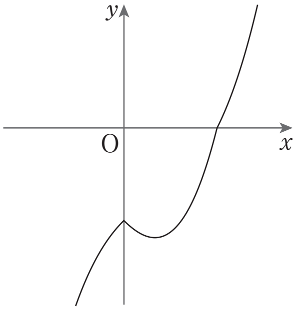
1　関数 $y=x^3-|x^2-x|-1$ のグラフをかけ。

[ア]

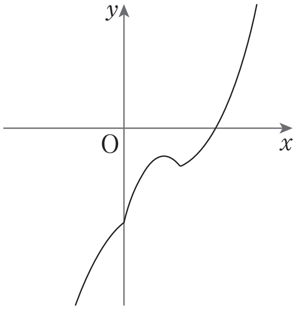
①



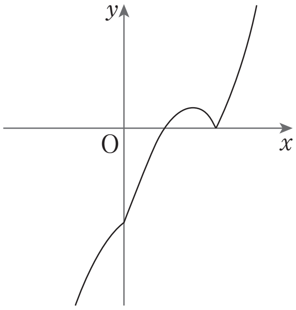
②



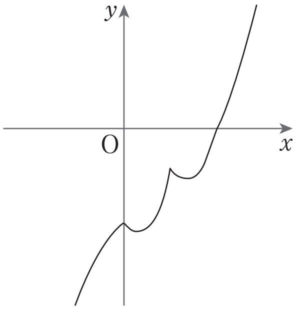
③



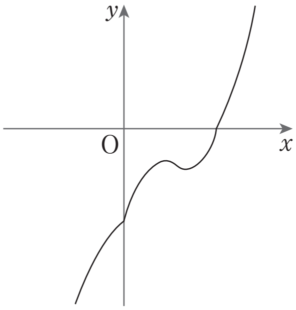
④



⑤



⑥



PART3　3 次関数の最大・最小

3　$a>0$ とする。$0 \leqq x \leqq a$ において，関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

Point Pickup

3 次関数の最大，最小は，区間の端点の y 座標と，区間内の極値が候補となる。
定義域を変化させたとき，極値をとる x 座標が区間の端点となるときや，区間の端点の y 座標と極値が一致するときの x 座標が，場合の分かれ目となる。

第15講　PART3　確認問題

1 $a>0$ とする。$0 \leqq x \leqq a$ において，関数

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

最も適切な値を答え，選択肢は最も適切なものを選べ。

$0<a<$ [ア]，[イ] $<a$ のとき　$m(a)=$ [ウ]

[エ] $\leqq a \leqq$ [オ] のとき　$m(a)=$ [カ]

[[ウ], [カ] の選択肢]

① 0　② -4　③ -9

④ a^3-6a^2+9a　⑤ $-a^3+6a^2-9a$

⑥ $3a^2-12a+9$　⑦ $-3a^2+12a-9$

第 16 講　方程式・不等式への応用

PART1　高次方程式の実数解の個数

1　x についての方程式 $3x^4-4x^3-12x^2-a=0$ が次の条件を満たすような，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　4 個の異なる実数解をもつ。

(2)　異なる実数解を 2 個だけもち，それらがともに正の数である。

Point Pickup

方程式 $f(x)=a$ の実数解 $\Longleftrightarrow$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標

第16講　PART1　確認問題

1　x についての方程式 $x^4-4x^3-12x^2+32x-a=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　2個の異なる実数解をもつ。

　　ア

(2)　3個の異なる正の実数解と，1個の負の実数解をもつ。

　　イ

① $a\leqq 0$　② $a\geqq 0$　③ $0<a<17$

④ $a=17$　⑤ $a\geqq 17$　⑥ $a>17$

⑦ $a<-64$　⑧ $a=-64$

⑨ $a=-64,\ a>17$　⑩ $-64<a<17$

PART2　3 本の接線が引けるための条件

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に 3 本の接線が引けるための a，b の満たすべき条件を求めよ。また，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

Point Pickup

3 次関数のグラフにおいては，接点が異なれば接線も異なる。

3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ

$\Longleftrightarrow$　3 次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と 3 点で交わる

$\Longleftrightarrow$　3 次関数 $y=f(x)$ が極値をもち，(極大値) >0 かつ (極小値) <0

$\Longleftrightarrow$　(極大値) $\times$ (極小値) <0

第16講　PART2　確認問題

1 点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=-x^3+x$ に3本の接線が引けるための $a,\ b$ の満たすべき条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$a,\ b$ の満たすべき条件　ア

点 $(a,\ b)$ の存在範囲　イ（境界は含まない）

[ア の選択肢]

① $a-b>0$ かつ $-a^3+a-b<0$

② $a-b<0$ かつ $-a^3+a-b<0$

③ $(a-b)(-a^3+a-b)<0$

④ $(a-b)(-a^3+a-b)>0$

⑤ $a+b>0$ かつ $-a^3+a+b<0$

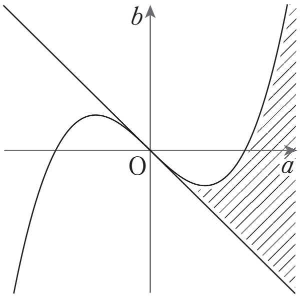
⑥ $a+b>0$ かつ $-a^3+a+b>0$

⑦ $(a+b)(-a^3+a+b)<0$

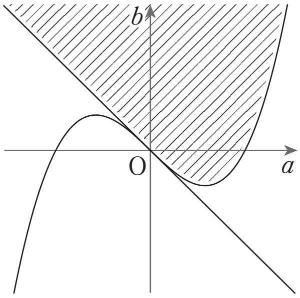
⑧ $(a+b)(-a^3+a+b)>0$

[イ の選択肢]

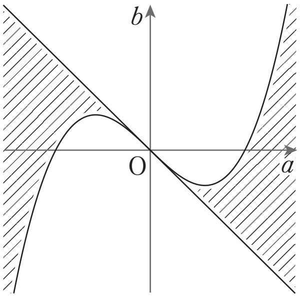
①



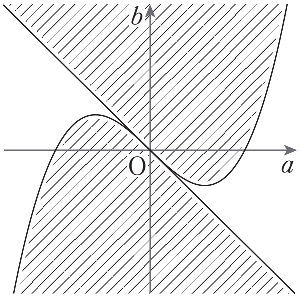
②



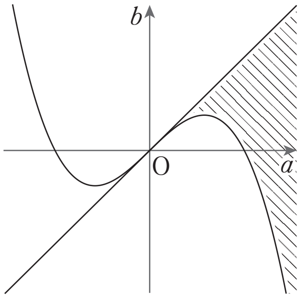
③



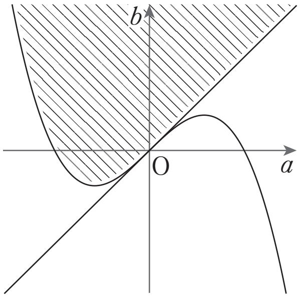
④



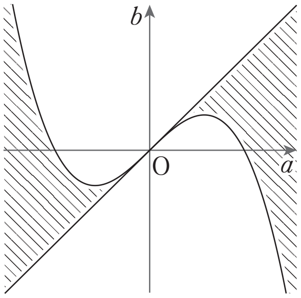
⑤



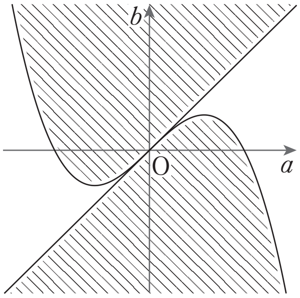
⑥



⑦



⑧



[MEMO]

PART3　不等式を満たす定数の値の範囲

3　$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $x^3 - ax^2 + a^2 \geqq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

不等式 $f(x) \geqq 0$ がつねに成立 $\Longleftrightarrow$ (関数 $f(x)$ の最小値) $\geqq 0$

第16講　PART3　確認問題

1　$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $2x^3-3ax^2+a+6>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

　　[ア]

① $a<0$　　② $a \leqq 0$

③ $a<2$　　④ $a \leqq 2$

⑤ $a>-6$　　⑥ $a \geqq -6$

⑦ $-6<a<0$　　⑧ $-6 \leqq a \leqq 0$

⑨ $-6<a<2$　　⑩ $-6 \leqq a \leqq 2$

第 17 講　不定積分，定積分

PART1　定積分の性質

1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt-\int_{2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

Point Pickup

(1) $\displaystyle\int_a^b\{kf(x)\pm lg(x)\}dx=k\int_a^b f(x)dx\pm l\int_a^b g(x)dx$ (複号同順)

を用いて，定積分の計算を項ごとに行うことができる。

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$　および　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

を用いて，1 つの定積分にまとめることができる。

また，n が奇数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=0$　　n が偶数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$

第17講　PART1　確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx=$ ア

2 $\displaystyle\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)\,dt+\int_{3}^{-1}(3t^2+2)(1-3t)\,dt$

$=$ イウエ

PART2　絶対値を含む関数の定積分

2　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x|x-2|dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|dx$

Point Pickup

絶対値記号を場合分けによってはずし，絶対値記号をはずす境目の値で積分区間を分け，それぞれの区間において場合分けによって絶対値記号をはずした関数を用いて積分を行う。

第17講　PART2　確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 6x|2x-1|dx = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2 $\displaystyle\int_{-3}^{1} |3x^2+6x|dx = \boxed{ウエ}$

PART3　定積分で表された関数の決定

3　[1]　等式 $f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

[2]　x の関数 $f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$ の極値を求めよ。

Point Pickup

[1]　$\int_0^1 tf(t)dt$，$\int_0^1 f(t)dt$ は定数であることから

$$\int_0^1 f(t)dt=a,\ \int_0^1 tf(t)dt=b\ \ (a,\ b \text{ は定数})$$

とおく。

[2]　$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$ を利用して，両辺を x で微分する。

第17講　PART3　確認問題

1 等式 $f(x)=x+\int_0^1 xf(t)dt-\int_0^1 2tf(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

2 x の関数 $f(x)=\int_0^x t(t+1)(4-t)dt$ の極値を求めよ。

極大値　$x=\boxed{オカ}$ で $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$,

$x=\boxed{ケ}$ で $\boxed{コサ}$

極小値　$x=\boxed{シ}$ で $\boxed{ス}$

第18講　定積分と面積

PART1　放物線と x 軸の間の面積

1　[1]　(1)　等式 $\displaystyle\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$ (C は定数) を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2]　(1)　等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

曲線 $y=f(x)$ と x 軸, および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる部分の面積 S は, 区間 $a\leqq x\leqq b$ において

常に $f(x)\geqq 0$ のとき　$\displaystyle S=\int_a^b f(x)\,dx$

常に $f(x)\leqq 0$ のとき　$\displaystyle S=\int_a^b\{-f(x)\}\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

[1]　(2)　$\displaystyle\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$ (C は定数)を用いて，放物線と x 軸の間の面積を求める。

[2]　(2)　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いて，放物線と x 軸で囲まれる部分の面積を求める。

第18講　PART1　確認問題

1　等式 $\displaystyle\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$（$C$は定数）を証明せよ。

（証明）

C' を定数とすると

$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{\boxed{ア}}x^{\boxed{イ}}-\alpha x^{\boxed{ウ}}+\alpha^2x+C'$$

$$=\frac{1}{\boxed{ア}}\left(\boxed{エ}\right)+\left(\boxed{オ}\right)+C'$$

$$=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\left(\boxed{オ}\right)+C'$$

$\left(\boxed{オ}\right)+C'$ は定数より

$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

が成り立つ。

[$\boxed{エ}$ の選択肢]

① $x^3-2\alpha x^2+2\alpha^2x+3\alpha^3$

② $x^3-2\alpha x^2+2\alpha^2x-3\alpha^3$

③ $x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3$

④ $x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3$

[$\boxed{オ}$ の選択肢]

① α^3　　② $-\alpha^3$　　③ $\dfrac{\alpha^3}{3}$　　④ $-\dfrac{\alpha^3}{3}$

2 放物線 $y=-x^2+4x-4$ と x 軸，および直線 $x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[カ]

3 放物線 $y=3x^2-12x-9$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

[キク]$\sqrt{\text{[ケ]}}$

[MEMO]

PART2　3 次関数のグラフと x 軸の間の面積

2　曲線 $y=x^3-3x^2-x+3$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

3 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求め，グラフと x 軸の上下関係を調べ，面積を求める。

第18講　PART2　確認問題

1　曲線 $y=-x^3+6x^2+4x-24$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

アイウ

PART3　変数を含む定積分の最大・最小

3　$f(t)=\int_1^2|x-t|dx$ とするとき，$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

Point Pickup

積分区間が $1\leqq x\leqq 2$ であることから，絶対値記号をはずす境目である $x=t$ が

（i）積分区間より左側　　(ii)　積分区間内　　(iii)　積分区間より右側

のいずれにあるかで場合分けを行う。

第18講　PART3　確認問題

1　$f(t)=\int_{-1}^{3}|x-2t|dx$ とするとき，$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

$t=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき　最小値 $\boxed{ウ}$

第19講　2 曲線と面積

PART1　曲線と接線の間の面積

1　[1]　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[2]　曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

区間 $a \leqq x \leqq b$ において，常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる部分の面積 S は $S=\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$ を利用して面積を求める。

2曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=\alpha$ で接するとき，方程式 $f(x)-g(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもち，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因数にもつ。

C が定数のとき

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C \qquad \text{とくに} \qquad \int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

が利用できるとよい。

第19講　PART1　確認問題

1 放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=-4x$, および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

2 曲線 $y=-2x^3+6x^2+6x-11$ とその曲線上の点 $(2,\ 9)$ における接線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$$\frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$$

PART2　面積を 2 等分

2　放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積が直線 $y=ax$ で 2 等分されるとき，a の値を求めよ。ただし，$0<a<3$ とする。

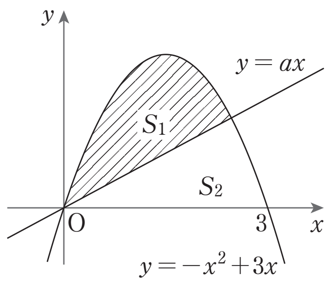
Point Pickup

右図のように放物線と直線で囲まれた部分, 放物線と直線および x 軸で囲まれた部分の面積を，それぞれ S_1，S_2，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると，

$S_1=S_2$，$S=S_1+S_2$ であることから

$$S=2S_1$$

である。



第19講　PART2　確認問題

1　放物線 $y=-x^2+8x$ と x 軸で囲まれた部分を直線 $y=ax$ で分割する。このとき，$y \geqq ax$ の部分と $y \leqq ax$ の部分の面積の比が 1:7 となるような定数 a の値を求めよ。ただし，$0<a<8$ とする。

$a=$ ［ア］

PART3　面積の最大・最小

3　放物線 $y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ の最小値を求めよ。

Point Pickup

放物線と直線が 2 点で交わるとき，交点の x 座標を α，β（$\alpha<\beta$）とすると，放物線と直線によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ で求められる。ただし，a は放物線の式の x^2 の係数。

第19講　PART3　確認問題

1　放物線 $y=6x^2$ を C，点$(1,\ 12)$を通る傾きが a の直線を l とし，C と l で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ の最小値を求めよ。

最小値　ア

[MEMO]

テキスト　解答

第 1 講　式と計算

PART1　$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解

1　(1)　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを示せ。

(2)　$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(3)　$x^3+8y^3+18xy-27$ を因数分解せよ。

(1)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

(2)　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(3)　$x^3+8y^3+18xy-27$

$=x^3+(2y)^3+(-3)^3-3x\cdot 2y\cdot(-3)$

$=(x+2y-3)\{x^2+(2y)^2+(-3)^2-x\cdot 2y-2y\cdot(-3)-(-3)\cdot x\}$

$=(x+2y-3)(x^2+4y^2+9-2xy+6y+3x)$

$=(x+2y-3)(x^2-2xy+4y^2+3x+6y+9)$

PART2　二項定理

2　[1]　(1)　$(1+x)^4$ を展開せよ。

(2)　次の等式を証明せよ。

(i)　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(ii)　${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

[2]　$(x+y-3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の係数を求めよ。

[1]　(1)　$(1+x)^4={}_4\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1x+{}_4\mathrm{C}_2x^2+{}_4\mathrm{C}_3x^3+{}_4\mathrm{C}_4x^4$

$$=1+4x+\frac{4\cdot3}{2}x^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{6}x^3+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{24}x^4$$

$$=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

(2)　$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+{}_n\mathrm{C}_4x^4+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　……①

(i)　等式①において，$x=1$ のとき

$$(1+1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot1+{}_n\mathrm{C}_2\cdot1^2+{}_n\mathrm{C}_3\cdot1^3+{}_n\mathrm{C}_4\cdot1^4+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot1^n$$

よって　${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(ii)　等式①において，$x=-1$ のとき

$$(1-1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot(-1)+{}_n\mathrm{C}_2\cdot(-1)^2+{}_n\mathrm{C}_3\cdot(-1)^3+{}_n\mathrm{C}_4\cdot(-1)^4$$
$$+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot(-1)^n$$

よって　${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

[2]　$(x+y-3z)^5=\{(x+y)-3z\}^5$ の展開式において，z^2 を含む項は

$${}_5\mathrm{C}_2(x+y)^3(-3z)^2=90(x+y)^3z^2$$

さらに，$(x+y)^3$ の展開式において，xy^2 を含む項は

$${}_3\mathrm{C}_2xy^2=3xy^2$$

したがって，xy^2z^2 の係数は　$90\times3=270$

(別解)

$(x+y-3z)^5$ の展開式において，xy^2z^2 の項は　$\dfrac{5!}{1!2!2!}xy^2(-3z)^2=270xy^2z^2$

よって，求める係数は　270

PART3　分数式の計算

3　[1]　$\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ。

[2]　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$　　(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

[1]　$\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-6}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-6}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-6)-n}{n(n-6)}=\frac{3}{n(n-6)}$$

[2]　(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$

$$=x+2+\frac{2}{x+2}-\left(x+2+\frac{2}{x+3}\right)$$

$$=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+3}=2\cdot\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{2}{(x+2)(x+3)}$$

$$\begin{array}{r}
x+2\\
x+2\,\big)\,\overline{x^2+4x+6}\\
\underline{x^2+2x}\\
2x+6\\
\underline{2x+4}\\
2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
x+2\\
x+3\,\big)\,\overline{x^2+5x+8}\\
\underline{x^2+3x}\\
2x+8\\
\underline{2x+6}\\
2
\end{array}$$

(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

$$=\left(1-\frac{1}{x+2}\right)-\left(1-\frac{1}{x+3}\right)-\left(1-\frac{1}{x+4}\right)+\left(1-\frac{1}{x+5}\right)$$

$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{-(x+3)+(x+2)}{(x+2)(x+3)}+\frac{(x+5)-(x+4)}{(x+4)(x+5)}=-\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

$$=\frac{-(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=-\frac{4x+14}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$=-\frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式，等式の証明

1　[1]　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c=x^3+x^2-8x+5$$

[2]　実数 a，b，c について，$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

[1]　（解法 1）

等式の左辺を展開し，x について整理すると

$$x^3+(a-6)x^2-(4a-b-12)x+(4a-2b+c-8)=x^3+x^2-8x+5$$

これが x についての恒等式となるとき

$$a-6=1,\ 4a-b-12=8,\ 4a-2b+c-8=5$$

これを解いて　$a=7$，$b=8$，$c=1$

（解法 2）

等式の両辺に $x=1$，2，3 をそれぞれ代入すると

$$-1+a-b+c=-1,\ c=1,\ 1+a+b+c=17$$

これを解いて　$a=7$，$b=8$，$c=1$

このとき，与えられた等式の左辺は

$$\begin{aligned}(x-2)^3+7(x-2)^2+8(x-2)+1&=x^3-6x^2+12x-8+7(x^2-4x+4)+8x-16+1\\&=x^3+x^2-8x+5\end{aligned}$$

となり，右辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より　$a=7$，$b=8$，$c=1$

［2］　$a+b+c=0$ より，$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3=-1-1-1+3=0$$

よって

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

PART2　不等式の証明

2　［1］　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

(2)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

［2］　x，y を実数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$|x|-|y| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$$

［1］　(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(ay-bx)^2 \geqq 0$

よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号成立は　$ay=bx$　のとき

(2)　$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$

$=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2+b^2-bc+c^2=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$

$=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b-c)^2 \geqq 0$

よって　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

等号成立は　$a=\dfrac{b+c}{2}$ かつ $b=c$　つまり　$a=b=c$　のとき

（別解）

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$

よって　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

等号成立は　$a=b=c$　のとき

[２]　$|x+y|\leqq|x|+|y|$ を示す。

$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)=2(|xy|-xy)\geqq 0$

よって　$|x+y|^2\leqq(|x|+|y|)^2$

$|x+y|\geqq 0$，$|x|+|y|\geqq 0$ であるから　$|x+y|\leqq|x|+|y|$

次に，$|x|-|y|\leqq|x+y|$ を示す。

（i）$|x|-|y|\geqq 0$ のとき

$|x+y|^2-(|x|-|y|)^2=x^2+2xy+y^2-(x^2-2|x||y|+y^2)=2(|xy|+xy)\geqq 0$

よって　$(|x|-|y|)^2\leqq|x+y|^2$

$|x+y|\geqq 0$，$|x|-|y|\geqq 0$ であるから　$|x|-|y|\leqq|x+y|$

(ii)　$|x|-|y|<0$ のとき

$|x+y|\geqq 0$ であるから　$|x|-|y|\leqq|x+y|$

（i），(ii)より　$|x|-|y|\leqq|x+y|$

したがって　$|x|-|y|\leqq|x+y|\leqq|x|+|y|$

PART3　相加平均と相乗平均

3　[1]　$a>0$，$b>0$，$a \neq b$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ の大小を比較せよ。

[2]　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ。

[1]　$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}$ と $\sqrt{ab}$ の平方の差をとると

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}>0\quad(\because\ a\neq b)$$

よって　$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2>(\sqrt{ab})^2$

$\dfrac{a+b}{2}>0$，$\sqrt{ab}>0$ であるから　$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ ……①

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{2}{\dfrac{a+b}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$

$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ と $\dfrac{2ab}{a+b}$ の平方の差をとると

$$(\sqrt{ab})^2-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=\frac{ab(a+b)^2-4a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{ab\{(a+b)^2-4ab\}}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}>0\quad(\because\ a\neq b)$$

よって　$(\sqrt{ab})^2>\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^2$

$\sqrt{ab}>0$，$\dfrac{2ab}{a+b}>0$ であるから　$\sqrt{ab}>\dfrac{2ab}{a+b}$

すなわち　$\sqrt{ab}>\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ ……②

①，②より　$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$

［2］　$$x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1$$

$x>0$ より $x+1>0$

よって，(相加平均) ≧ (相乗平均)から

$$x+1+\frac{4}{x+1}-1 \geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=4-1=3$$

等号成立は　$x+1=\dfrac{4}{x+1}$ のとき

このとき　$(x+1)^2=4$　　$x+1>0$ より　$x+1=2$ すなわち　$x=1$

したがって，求める最小値は 3 （$x=1$ のとき）

第 3 講　複素数と方程式

PART1　複素数と式の値，解と係数の関係

1　[1]　$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^2-2x+4，$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ の値を求めよ。

[2]　2 次方程式 $2x^2-8x-3=0$ の 2 つの解を α，β とする。

(i)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

(ii)　$\alpha-3$，$\beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

[1]　$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき

$$x^2-2x+4=(1+\sqrt{3}\,i)^2-2(1+\sqrt{3}\,i)+4=1+2\sqrt{3}\,i-3-2-2\sqrt{3}\,i+4=0$$

$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ を x^2-2x+4 で割ると

商は　x^3+3x^2+3x-5，余りは　$-21x+21$

よって　$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2-2x+4)(x^3+3x^2+3x-5)-21x+21$ ……①

$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，$x^2-2x+4=0$ であるから，①より

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=-21x+21=-21(1+\sqrt{3}\,i)+21=-21\sqrt{3}\,i$$

[2]　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-8}{2}=4,\quad \alpha\beta=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$

(i)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{4}{-\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{8}{3}$

(ii)　$(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6=4-6=-2$

$$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=-\frac{3}{2}-12+9=-\frac{9}{2}$$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは $x^2+2x-\dfrac{9}{2}=0$　すなわち　$2x^2+4x-9=0$

PART2　3 次方程式の解から係数の決定

2　3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。ただし，a，b は実数とする。

$x=1+2i$ が 3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ の解であるから

$$(1+2i)^3-(a-1)(1+2i)^2+(b-2)(1+2i)+5=0$$

整理すると　$(3a+b-11)+(-4a+2b-2)i=0$

a，b は実数であるから，$3a+b-11$，$-4a+2b-2$ も実数である。

よって　$3a+b-11=0$，$-4a+2b-2=0$

したがって　$a=2$，$b=5$

このとき，3 次方程式は

$$x^3-x^2+3x+5=0$$

$$(x+1)(x^2-2x+5)=0$$

$$x=-1,\ 1\pm2i$$

1	-1	3	5	$\lfloor -1$
	-1	2	-5	
1	-2	5	0	

したがって，他の解は -1，$1-2i$

（別解 1）

実数係数の 3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ が虚数 $1+2i$ を解にもつとき，共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である。

もう 1 つの解を α とすると，3 次方程式の解と係数の関係より

$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=a-1$ …… ①

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=b-2$ …… ②

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-5$ …… ③

③より　$5\alpha=-5$　　よって　$\alpha=-1$

このとき

①より　$a=\alpha+3=2$

②より　$b=2\alpha+7=5$

したがって　$a=2$，$b=5$

他の解は　$1-2i$，-1

（別解 2）

実数係数の 3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ が虚数 $1+2i$ を解にもつとき，

共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である。

よって，$P(x)=x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5$ とおくと，$P(1+2i)=0$，$P(1-2i)=0$ より

$P(x)$ は $x-(1+2i)$，$x-(1-2i)$ を因数にもつ。

したがって，$P(x)$ は $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$ すなわち x^2-2x+5 で割り切れる。

$P(x)$ を x^2-2x+5 で割った余りは

$$(-2a+b-1)x+(5a-10)$$

$$\begin{array}{r|llll}
 & x & +(-a+3) & & \\ \hline
x^2-2x+5 & x^3 & -(a-1)x^2 & +(b-2)x & +5 \\
 & x^3 & -2x^2 & +5x & \\ \hline
 & & (-a+3)x^2 & +(b-7)x & +5 \\
 & & (-a+3)x^2 & -2(-a+3)x & +5(-a+3) \\ \hline
 & & & (-2a+b-1)x & +(5a-10)
\end{array}$$

余りは 0 であるから

$$-2a+b-1=0,\ 5a-10=0$$

これを解いて

$$a=2,\ b=5$$

このとき

$$P(x)=(x^2-2x+5)\{x+(-a+3)\}$$

$$=(x^2-2x+5)(x+1)$$

より，方程式 $P(x)=0$ の他の解は　$1-2i$，-1

PART3　x^2+x+1 と虚数立方根

3　(1)　a，b が実数，z が虚数のとき

$$a+bz=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

であることを証明せよ。

(2)　$P(x)=x^{11}$ とする。$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$a=0$ かつ $b=0 \implies a+bz=0$ は明らかに成り立つ。

$a+bz=0 \implies a=0$ かつ $b=0$ を示す。

$b \fallingdotseq 0$ と仮定すると，$a+bz=0$ より　$z=-\dfrac{a}{b}$

a，b が実数，z が虚数であるから，$z=-\dfrac{a}{b}$ の左辺は虚数，右辺は実数となり，矛盾する。

よって　$b=0$　　このとき　$a=0$

したがって，a，b が実数，z が虚数のとき

$$a+bz=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

(2)　$P(x)=x^{11}$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$(a，b は実数)とすると

$$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

ここで，2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると，ω は虚数解であり

$$\omega^2+\omega+1=0$$

$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ であるから　$\omega^3=1$

このとき　$P(\omega)=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b$　…… ①

また，$P(\omega)=\omega^{11}=(\omega^3)^3\cdot\omega^2=1\cdot(-\omega-1)=-\omega-1$ …… ②

①，②より　$a\omega+b=-\omega-1$

すなわち　$(b+1)+(a+1)\omega=0$

a，b は実数であるから $a+1$，$b+1$ も実数である。

よって，(1)から　$b+1=0$，$a+1=0$

すなわち　$a=-1$，$b=-1$

したがって，求める余りは　$-x-1$

第4講　点と直線

PART1　2直線の交点を通る直線

1　2直線 $3x-2y+2=0$ …… ①，$2x+y-3=0$ …… ②の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(-2,\ 1)$ を通る

(2)　直線 $5x-y-6=0$ と平行

(3)　直線 $4x-y-1=0$ と垂直

2直線 $3x-2y+2=0$ …… ①，$2x+y-3=0$ …… ② の交点の座標は，$\left(\frac{4}{7},\ \frac{13}{7}\right)$

(1)　2点 $\left(\frac{4}{7},\ \frac{13}{7}\right)$，$(-2,\ 1)$ を通る直線の方程式は

$$y-1=\frac{\frac{13}{7}-1}{\frac{4}{7}-(-2)}\{x-(-2)\}\quad より\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

(2)　直線 $5x-y-6=0$ の傾きは5であるから，求める直線の傾きも5である。

よって，求める直線の方程式は　$y=5\left(x-\frac{4}{7}\right)+\frac{13}{7}$　すなわち　$y=5x-1$

(3)　直線 $4x-y-1=0$ の傾きは4であるから，求める直線の傾きは $-\frac{1}{4}$

よって，求める直線の方程式は　$y=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{4}{7}\right)+\frac{13}{7}$　すなわち　$y=-\frac{1}{4}x+2$

(別解)

2直線 $3x-2y+2=0$ …… ①，$2x+y-3=0$ …… ② の交点を通る直線は，実数 k を用いて

$$3x-2y+2+k(2x+y-3)=0$$

と表され，これを x，y について整理すると

$$(2k+3)x+(k-2)y-3k+2=0 \cdots\cdots ③$$

(1)　直線③が点 $(-2,\ 1)$ を通るので　$-6-6k=0$　　$k=-1$

これを③に代入して　$x-3y+5=0$

⑵　直線③が直線 $5x-y-6=0$ と平行であることから

$$(2k+3)\cdot(-1)-5\cdot(k-2)=0 \qquad k=1$$

これを③に代入して　$5x-y-1=0$

⑶　直線③が直線 $4x-y-1=0$ と垂直であることから

$$(2k+3)\cdot 4+(k-2)\cdot(-1)=0 \qquad k=-2$$

これを③に代入して　$x+4y-8=0$

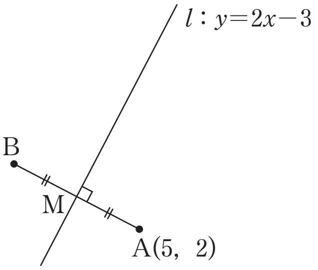
PART2　線対称の点，折れ線の長さの最小値

2　直線 l: $y=2x-3$ と点 A(5，2) がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ。

(2)　点 P が直線 l 上を動くとき，AP の最小値を求めよ。また，点 C(6，6) に対して，AP＋PC が最小となる点 P の座標を求めよ。

(1)　点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。



AB ⊥ l より　$2\cdot\dfrac{b-2}{a-5}=-1$

よって　$a+2b=9$ …… ①

線分 AB の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$ が直線 l 上にあることから

$$\frac{b+2}{2}=2\cdot\frac{a+5}{2}-3 \qquad \text{よって}\quad 2a-b=-2 \text{ …… ②}$$

①，②より　$a=1$，$b=4$　　したがって　B(1，4)

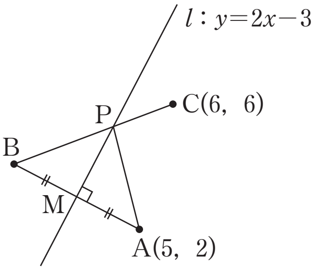
(2)　AP が最小となるのは，AP ⊥ l となるときで，このとき P は(1)より M(3，3) と一致する。

よって，求める AP の最小値は　$\mathrm{AM}=\sqrt{(5-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$

また，右図のように，2 点 A，C は直線 l に関して同じ側にあり，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}=\mathrm{BP}+\mathrm{PC}\geqq\mathrm{BC}$$

より，3 点 B，P，C が一直線上にあるとき，AP＋PC は最小となり，このとき，点 P は直線 BC と直線 l の交点である。



直線 BC の方程式は $y=\dfrac{6-4}{6-1}(x-1)+4$　つまり　$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{18}{5}$

これと直線 l の方程式を連立させて解くと　$x=\dfrac{33}{8}$，$y=\dfrac{21}{4}$

したがって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{33}{8},\ \dfrac{21}{4}\right)$

PART3　三角形の面積，三角形の外心の座標

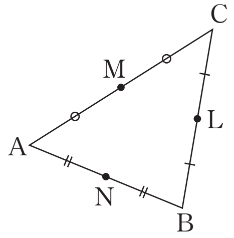
3　△ABC で，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L(4，−1)，M(−1，1)，N(−2，−5) とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　直線 AB の方程式，および点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

(3)　△ABC の外心の座標を求めよ。

(1)　A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，C(x_3, y_3) とすると，条件より



$$\frac{x_1+x_2}{2}=-2,\quad \frac{x_2+x_3}{2}=4,\quad \frac{x_3+x_1}{2}=-1$$

よって　$x_1+x_2=-4$，$x_2+x_3=8$，$x_3+x_1=-2$

これらより　$x_1=-7$，$x_2=3$，$x_3=5$

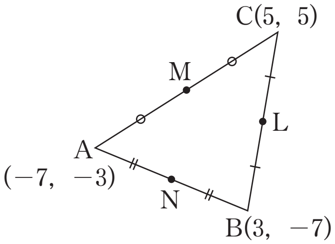
同様に

$$\frac{y_1+y_2}{2}=-5,\quad \frac{y_2+y_3}{2}=-1,\quad \frac{y_3+y_1}{2}=1$$

より　$y_1=-3$，$y_2=-7$，$y_3=5$

よって　A(−7，−3)，B(3，−7)，C(5，5)

(2)　直線 AB の方程式は



$$y=\frac{-7-(-3)}{3-(-7)}(x-3)-7 \qquad y=-\frac{2}{5}(x-3)-7$$

よって　$2x+5y+29=0$

点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さ d は，点 C と直線 AB との距離で

$$d=\frac{|2\cdot5+5\cdot5+29|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{64}{\sqrt{29}}$$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3+7)^2+(-7+3)^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{29}\cdot\frac{64}{\sqrt{29}}=64$

(3)　求める外心は，線分 AB，線分 BC それぞれの垂直二等分線の交点である。

線分 AB の垂直二等分線は，線分 AB の中点 N を通り，AB に垂直な直線である。

その方程式は　$y=\frac{5}{2}(x+2)-5$　すなわち　$5x-2y=0$ ……①

線分 BC の垂直二等分線は，線分 BC の中点 L を通り，BC に垂直な直線である。

直線 BC の傾きは $\frac{5-(-7)}{5-3}=6$ であるから，線分 BC の垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{1}{6}(x-4)-1 \quad \text{すなわち} \quad x+6y+2=0 \text{ ……②}$$

①，②より　$x=-\frac{1}{8}$，$y=-\frac{5}{16}$

したがって，求める外心の座標は　$\left(-\frac{1}{8},\ -\frac{5}{16}\right)$

第 5 講　円

PART1　円と直線，円の弦の長さ

1　点 (2，0) を中心とする半径 1 の円 C と，点 (0，-1) を通る傾き m の直線 l がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l が円 C と共有点をもつような m の値の範囲を求めよ。

(2)　直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，m の値を求めよ。

$C:(x-2)^2+y^2=1$　　　$l:y=mx-1$

(1)　(解法 1)

$y=mx-1$ を $(x-2)^2+y^2=1$ に代入して

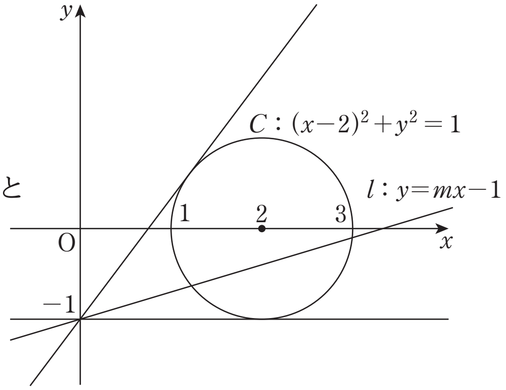
$$(x-2)^2+(mx-1)^2=1$$

$$(m^2+1)x^2-2(m+2)x+4=0$$

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2+1)\cdot 4$$

$$=-m(3m-4)$$



l と C が共有点をもつのは $D\geqq 0$ のとき

よって　$m(3m-4)\leqq 0$ より　$0\leqq m\leqq \dfrac{4}{3}$

(解法 2)

円 C の中心 (2，0) と直線 l: $mx-y-1=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|m\cdot 2-0-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

l と C が共有点をもつのは $d\leqq$ (円 C の半径)のときであるから

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\leqq 1\qquad |2m-1|\leqq\sqrt{m^2+1}\qquad (2m-1)^2\leqq m^2+1\qquad m(3m-4)\leqq 0$$

よって　$0\leqq m\leqq \dfrac{4}{3}$

(2)　円 C の中心を C とし，C から直線 l に下ろした垂線を CH とする。また，直線 l と円 C の 2 つの交点を A，B とすると，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ であり

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

△ACH において，三平方の定理より

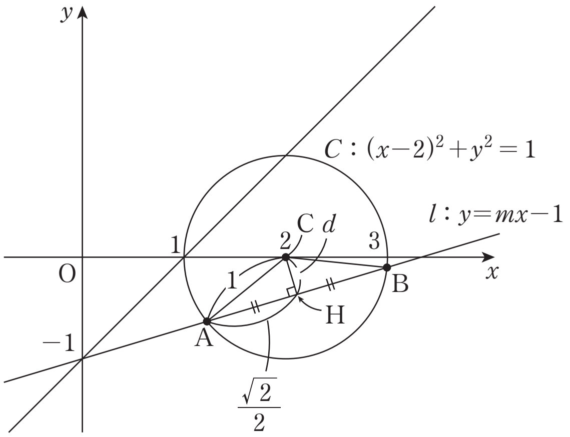
$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AH}^2$$

$$\left(\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$2(2m-1)^2=m^2+1$$

$$(7m-1)(m-1)=0$$

よって　$m=\frac{1}{7}$，1

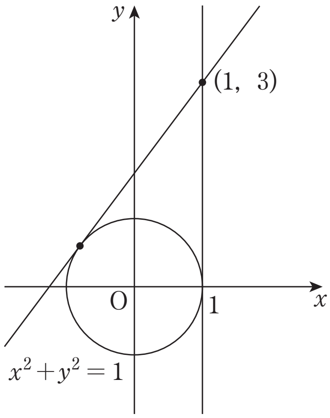


PART2　円の接線，２円の交点を通る図形

2　[1]　点 $(1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

[2]　円 $(x-1)^2+y^2=5$ と，中心 $(a,\ b)$，半径１の円の２つの共有点を通る直線の方程式が $x-y+2=0$ である。このとき，$(a,\ b)$ を求めよ。

[1]　図より，求める接線の１つは直線 $x=1$ である。



x 軸に垂直でないもう１本の接線の方程式を

$$y=m(x-1)+3$$

すなわち $mx-y-m+3=0$ …… ①とおくと，

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線①の距離が円の半径１と等しい。したがって

$$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$(m-3)^2=m^2+1 \qquad m=\frac{4}{3}$$

これを①に代入して整理すると　$4x-3y+5=0$

よって，求める接線の方程式は　$x=1,\ 4x-3y+5=0$

（別解）

求める接線と円の接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，点Pにおける接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=1 \ \cdots\cdots \ ①$$

これが点 $(1,\ 3)$ を通るので　$x_1+3y_1=1$　すなわち　$x_1=1-3y_1$ …… ②

また，点Pは円上の点であるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=1$ …… ③

②を③に代入して整理すると

$$5y_1{}^2-3y_1=0 \qquad y_1(5y_1-3)=0 \qquad y_1=0,\ \frac{3}{5}$$

②より　$y_1=0$　のとき　$x_1=1$　　$y_1=\dfrac{3}{5}$　のとき　$x_1=-\dfrac{4}{5}$

したがって①から，求める接線の方程式は

$$x=1,\ -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=1 \quad \text{すなわち} \quad x=1,\ 4x-3y+5=0$$

［2］　題意より，円 $(x-1)^2+y^2=5$ …… ① と直線 $x-y+2=0$ …… ② の 2 つの共有点を中心 $(a,\ b)$，半径 1 の円が通る。

①，②の共有点を通る図形の方程式は

$$(x-1)^2+y^2-5+k(x-y+2)=0 \quad (k\text{ は定数})$$

$$x^2+(k-2)x+y^2-ky+2k-4=0$$

$$\left(x+\frac{k-2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{1}{2}k^2-3k+5 \text{ …… ③}$$

と表される。③が半径 1 の円を表すのは $\frac{1}{2}k^2-3k+5=1^2$ のときであり

$$k^2-6k+8=0 \qquad (k-2)(k-4)=0$$

よって　$k=2,\ 4$ のときである。

このとき，円③の中心の座標は $\left(-\frac{k-2}{2},\ \frac{k}{2}\right)$

$k=2$ のとき　円の中心は $(0,\ 1)$

$k=4$ のとき　円の中心は $(-1,\ 2)$

したがって　$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (-1,\ 2)$

PART3　2 円の位置関係，2 円の共通弦

3　2 円 C_1 : $x^2+y^2=1$，C_2 : $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2\ (r>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　2 円が異なる 2 点で交わるときの r のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，2 円の共通弦の長さが最大となるときの r の値と，そのときの共通弦の長さを求めよ。

円 C_1 の中心は $(0,\ 0)$，半径は 1　　　円 C_2 の中心は $(2,\ 1)$，半径は r

2 円の中心間の距離は　$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(1)　2 円が異なる 2 点で交わるのは　$|r-1|<\sqrt{5}<r+1$ のとき

$|r-1|<\sqrt{5}$ より　$1-\sqrt{5}<r<1+\sqrt{5}$

$\sqrt{5}<r+1$ より　$-1+\sqrt{5}<r$

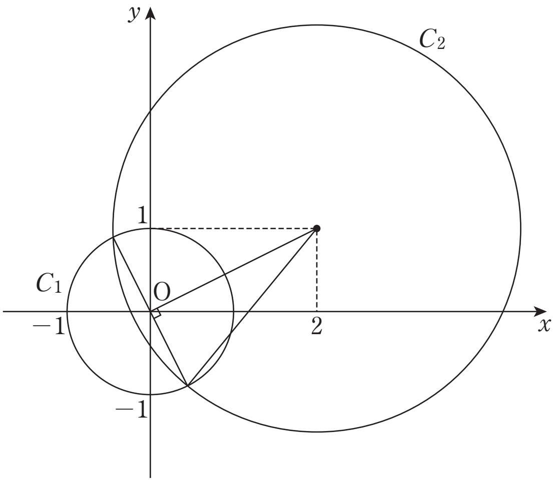
よって　$-1+\sqrt{5}<r<1+\sqrt{5}$

(2)　2 円が異なる 2 点で交わるとき，2 円の共通弦の長さが最大になるのは，右図より共通弦が円 C_1 の中心を通るとき，すなわち共通弦が円 C_1 の直径となるときである。

したがって，共通弦の長さの最大値は 2

また，このときの円 C_2 の半径 r は，三平方の定理より　$r^2=1^2+(\sqrt{5})^2$

$r>0$ より　$r=\sqrt{6}$



(r を求める別解)

2 円の異なる 2 交点を通る直線の方程式は

$$x^2+y^2-1+k\{(x-2)^2+(y-1)^2-r^2\}=0$$

において $k=-1$ のときであり，$4x+2y+r^2-6=0$ …… ① である。

①が円 C_1 の中心 $(0,\ 0)$ を通るとき，2 円の共通弦の長さが最大となる。

したがって　$r^2-6=0$

$r>0$ より　　$r=\sqrt{6}$

第 6 講　軌跡

PART1　定点からの距離が一定，媒介変数と軌跡

1　[1]　点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が $2:1$ であるという。点Pの軌跡を求めよ。

[2]　放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする。$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの軌跡を求めよ。

[1]　円 $x^2+y^2=1$ ……① の中心をOとすると，O(0，0)，半径は1

円 $(x-3)^2+y^2=1$ ……② の中心をAとすると，A(3，0)，半径は1

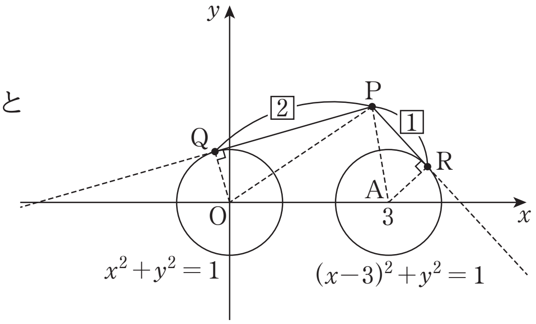
点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

点Pから円①に引いた接線の接点をQとすると

$$PQ^2=OP^2-OQ^2=x^2+y^2-1$$

点Pから円②に引いた接線の接点をRとすると

$$PR^2=AP^2-AR^2=(x-3)^2+y^2-1$$



条件より　$PQ:PR=2:1$　　$2PR=PQ$

両辺を2乗して　$4PR^2=PQ^2$

よって　$4\{(x-3)^2+y^2-1\}=x^2+y^2-1$

整理すると　$x^2-8x+y^2+11=0$　　すなわち　$(x-4)^2+y^2=5$

したがって，求める軌跡は　中心 $(4,\ 0)$，半径 $\sqrt{5}$ の円

[2]　$y=x^2+(4-4a)x+4a-4=\{x-(2a-2)\}^2-4a^2+12a-8$

頂点Pの座標は　$(2a-2,\ -4a^2+12a-8)$

よって，頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=2a-2$ ……①　　　$y=-4a^2+12a-8$ ……②

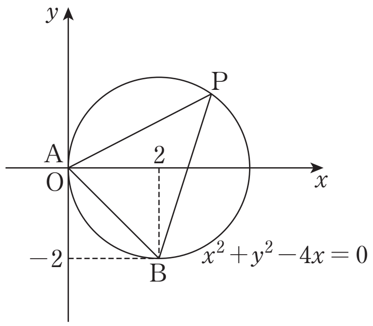
①より　$a=\dfrac{x+2}{2}$　　これを②に代入して　$y=-4\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2+12\cdot\dfrac{x+2}{2}-8=-x^2+2x$

また，$0<a\leqq 2$ より　$0<\dfrac{x+2}{2}\leqq 2$　　$-2<x\leqq 2$

したがって，求める軌跡は　放物線 $y=-x^2+2x$ の $-2<x\leqq 2$ の部分

PART2　動点と軌跡

2　点 P が円 $x^2+y^2-4x=0$ 上を動くとき，3 点 A(0，0)，B(2，−2)，P を頂点とする三角形 ABP の重心 G の軌跡を求めよ。



P(s，t) とおくと，点 P は円 $x^2+y^2-4x=0$ 上を動くから

$$s^2+t^2-4s=0 \quad \cdots\cdots ①$$

△ABP の重心を G(x，y) とおくと

$$x=\frac{0+2+s}{3},\quad y=\frac{0-2+t}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

すなわち　$s=3x-2$，$t=3y+2$ …… ③

③を①に代入して

$$(3x-2)^2+(3y+2)^2-4(3x-2)=0$$

整理して

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

ここで，点 P が (0，0)，(2，−2) のときは，点 P はそれぞれ点 A，点 B と一致し，三角形ができないため，不適。

よって　$(s,\ t) \neq (0,\ 0),\ (2,\ -2)$

このとき②より　$(x,\ y) \neq \left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

したがって，求める軌跡は

中心 $\left(\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$，半径 $\frac{2}{3}$ の円　　ただし，2 点 $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$ を除く

PART3　放物線の弦の中点の軌跡

3　放物線 $C: y=x^2$ と直線 $l: y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C と l が異なる２点 A，B で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

(1)　$y=x^2$ と $y=m(x+2)$ より

$$x^2=m(x+2)$$

$$x^2-mx-2m=0 \cdots\cdots ①$$

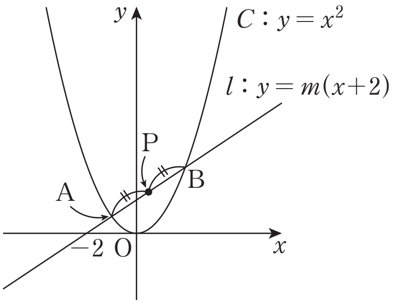
C と l が異なる２点で交わるのは，２次方程式①の判別式を D とすると $D>0$ のときである。

$$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot(-2m)=m(m+8)$$

より　$m(m+8)>0$

よって　$m<-8,\ 0<m$

(2)　(1)のとき，２点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると α，β は２次方程式①の異なる２解である。



よって，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=m$

線分 AB の中点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2} \cdots\cdots ②$$

また，点 P は直線 l 上の点であるから　$y=m(x+2) \cdots\cdots ③$

②から，$m=2x \cdots\cdots ②'$

これを③に代入して

$$y=2x(x+2)=2x^2+4x$$

また，(1)より $m<-8,\ 0<m$ であるから，②′より

$2x<-8,\ 0<2x$　　すなわち　　$x<-4,\ 0<x$

したがって，求める軌跡は

放物線 $y=2x^2+4x$ の $x<-4,\ 0<x$ の部分

第 7 講　領域

PART1　領域を利用した証明

1　$|x|+|y| \leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4) \geqq 0$ が成り立つことを証明せよ。

不等式 $|x|+|y| \leqq 1$，$(x+2y-2)(x^2+y^2-4) \geqq 0$ の表す領域をそれぞれ P，Q とする。

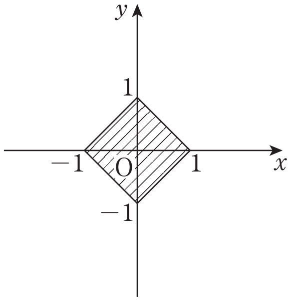
領域 P について

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき　$x+y \leqq 1$　つまり　$y \leqq -x+1$

$x \geqq 0$，$y < 0$ のとき　$x-y \leqq 1$　つまり　$y \geqq x-1$

$x < 0$，$y \geqq 0$ のとき　$-x+y \leqq 1$　つまり　$y \leqq x+1$

$x < 0$，$y < 0$ のとき　$-x-y \leqq 1$　つまり　$y \geqq -x-1$



よって，領域 P は右図斜線部分。ただし，境界線を含む。

領域 Q について

$x+2y-2 \geqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4 \geqq 0$　…… ①

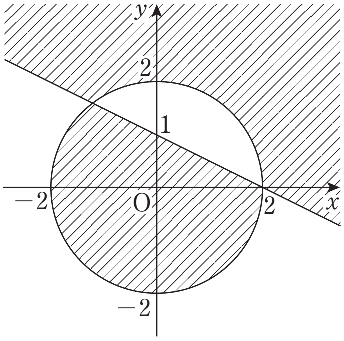
または

$x+2y-2 \leqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4 \leqq 0$　…… ②

の表す領域である。

①より　$y \geqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2 \geqq 4$

②より　$y \leqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2 \leqq 4$



よって，領域 Q は右図斜線部分。ただし，境界線を含む。

したがって，$P \subset Q$ が成り立つので，

$|x|+|y| \leqq 1$　ならば　$(x+2y-2)(x^2+y^2-4) \geqq 0$

が成り立つ。

PART2　領域と最大・最小

2　実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

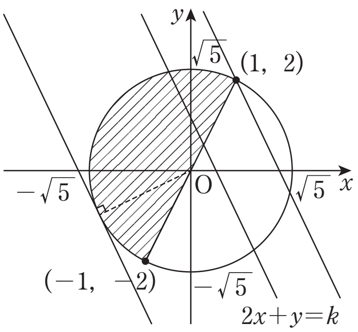
円 $x^2+y^2=5$ …… ① と直線 $y=2x$ …… ② の共有点の x 座標は

$x^2+(2x)^2=5$　　$x^2=1$ より　$x=\pm 1$

よって，円①と直線②の共有点の座標は　$(1,\ 2)$，$(-1,\ -2)$

したがって，連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ の表す

領域 D は，右図斜線部分。ただし，境界線を含む。



$2x+y=k$ …… ③ とおくと，$y=-2x+k$

これは，傾き -2，y 切片 k の直線を表す。

この直線③が領域 D と共有点をもつときの，y 切片 k の

最大値，最小値を求める。

k が最大となるのは，直線③が点 $(1,\ 2)$ を通るとき

このとき　$k=2\cdot 1+2=4$

k が最小となるのは，直線③が円①と第 3 象限で接するとき

直線③と円①の中心 $(0,\ 0)$ の距離が円の半径 $\sqrt{5}$ と等しくなるときを考えて

$\dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$　　$|k|=5$　　よって　$k=\pm 5$

第 3 象限で接するとき $k<0$　　よって　$k=-5$

このとき，直線③と円①の接点は，直線③と，$(0,\ 0)$ を通り直線③と垂直な直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の交点

であるから，その座標は $(-2,\ -1)$　　これは，領域 D に含まれる。

以上より　　最大値 4　$(x=1,\ y=2$ のとき$)$

　　　　　　最小値 -5 $(x=-2,\ y=-1$ のとき$)$

PART3　正領域・負領域

3 [1]　2点を A$(-2,\ -1)$，B$(3,\ 2)$ とする。線分 AB が直線 $y=ax+1$ と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[2]　放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の任意の点を P，直線 $y=-2x+6$ 上の任意の点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

[1]　$f(x,\ y)=ax-y+1$ とおくと，求める条件は，2点 A，B がともに $f(x,\ y)>0$ の領域にあるか，ともに $f(x,\ y)<0$ の領域にあることである。

$f(-2,\ -1)>0$ かつ $f(3,\ 2)>0$　または　$f(-2,\ -1)<0$ かつ $f(3,\ 2)<0$

したがって $f(-2,\ -1)\times f(3,\ 2)>0$ より

$$(-2a+1+1)(3a-2+1)>0 \qquad (a-1)(3a-1)<0$$

よって，求める a の値の範囲は　$\frac{1}{3}<a<1$

（別解）

$y=ax+1$ は，傾き a，y 切片 1 の直線を表す。

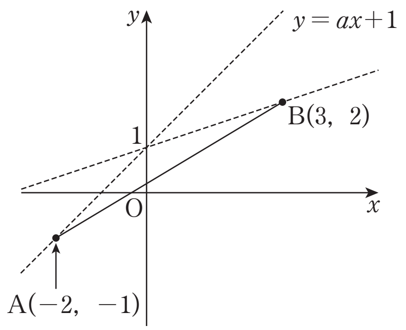
この直線が

点 B$(3,\ 2)$ を通るとき　$a=\frac{1}{3}$

点 A$(-2,\ -1)$ を通るとき　$a=1$

よって右図より，求める a の値の範囲は

$$\frac{1}{3}<a<1$$



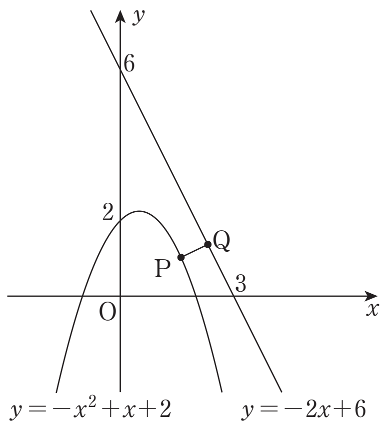
[2]　点 P の座標は $(t,\ -t^2+t+2)$ と表される。

求める線分 PQ の長さの最小値は，点 P と直線 $y=-2x+6$　すなわち　$2x+y-6=0$ の距離 d の最小値である。

$$d=\frac{|2t-t^2+t+2-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-t^2+3t-4|}{\sqrt{5}}$$

ここで右図より，点 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+t+2)$ は，

領域 $y<-2x+6$　すなわち　$2x+y-6<0$ にある。



したがって　$2t-t^2+t+2-6<0$　　つまり　$-t^2+3t-4<0$

このとき　$d=\dfrac{t^2-3t+4}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$

よって，d は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$ をとる。

したがって，求める最小値は $\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$ である。

第 8 講　三角関数のグラフ，方程式・不等式

PART1　三角関数のグラフ

1　[1]　関数 $y=3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期を求め，そのグラフをかけ。

[2]　方程式 $\sin\left(2x-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数をグラフを用いて求めよ。

[1]　$y=3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=3\cos 2\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

この関数のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを

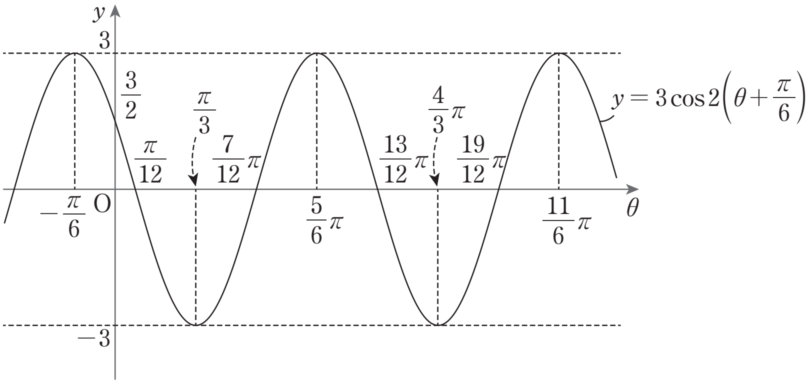
(Ⅰ)　y 軸方向に 3 倍に拡大

(Ⅱ)　θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小

(Ⅲ)　θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動

したものであり，周期は $2\pi\cdot\dfrac{1}{2}=\pi$ である。

グラフは下図。

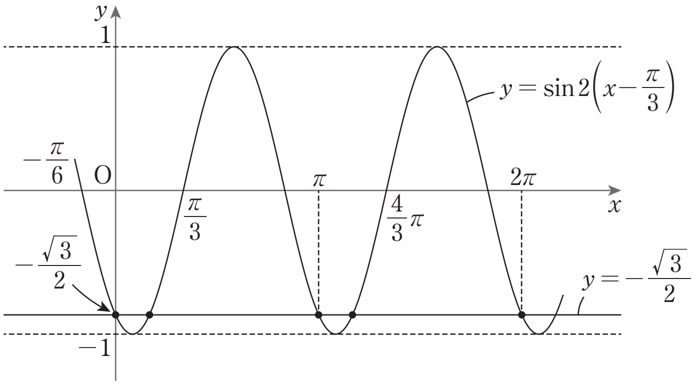


[2]　$y=\sin\left(2x-\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

この関数のグラフは下図。

このグラフと直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の共有点のうち，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にあるものの個数が求める解の個数である。

よって，解の個数は 5 個



PART2　三角関数を含む方程式・不等式

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

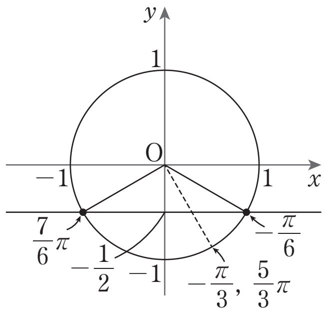
(1)　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{3}$　　(4)　$5\cos\theta - 2\sin^2\theta + 4 > 0$

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$

よって　$\theta - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

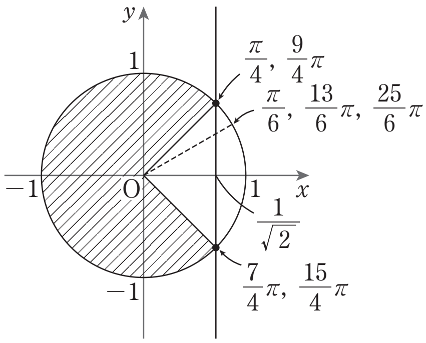
したがって　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi$



(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{25}{6}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{15}{4}\pi$

したがって　$\dfrac{\pi}{24} \leqq \theta \leqq \dfrac{19}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{43}{24}\pi$



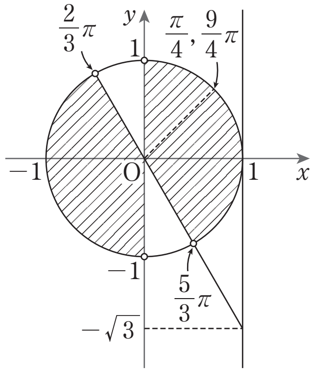
(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi < \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3}{2}\pi$,

$\dfrac{5}{3}\pi < \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

したがって

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{12}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi < \theta < 2\pi$



(4)　$5\cos\theta-2\sin^2\theta+4>0$

$5\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)+4>0$

$2\cos^2\theta+5\cos\theta+2>0$

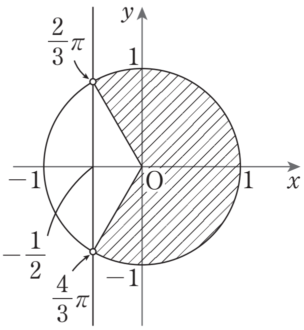
$(2\cos\theta+1)(\cos\theta+2)>0$

$\cos\theta \geqq -1$　より　$\cos\theta+2>0$ であるから

$2\cos\theta+1>0$

すなわち　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

したがって　$0 \leqq \theta < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$



PART3　三角関数を含む方程式の解が存在する条件

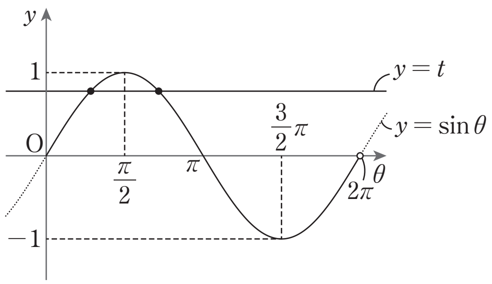
3　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　θ の方程式 $\sin\theta = t$ を満たす θ が存在するような定数 t の値の範囲を求めよ。

(2)　θ の方程式 $\sin\theta - \cos^2\theta = a$ を満たす θ が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式 $\sin\theta = t$ を満たす θ が存在するのは，$y = \sin\theta$ のグラフと直線 $y = t$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ において共有点をもつときである。

右図より　$-1 \leqq t \leqq 1$



(2)

$$\sin\theta - \cos^2\theta = a$$

$$\sin\theta - (1 - \sin^2\theta) = a$$

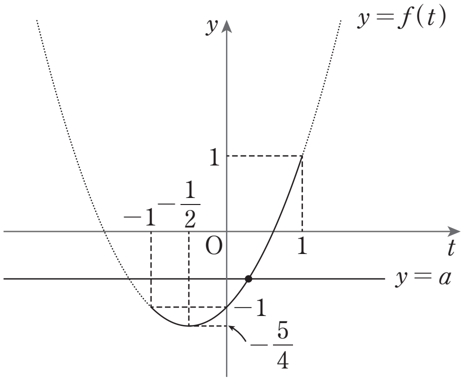
$$\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = a \quad \cdots\cdots ①$$

$\sin\theta = t$ とおくと　$t^2 + t - 1 = a$

この式の左辺を $f(t)$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式①を満たす θ が存在するのは，(1)より t の方程式 $f(t) = a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつときであり，$y = f(t)$ のグラフと直線 $y = a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ に共有点をもつときである。

$$f(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

であるから，右図より　$-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq 1$



第 9 講　加法定理

PART1　三角関数を含む方程式・不等式（2 倍角の公式）

1　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos x + \sin 2x = 0$

(2)　$\cos x - 3\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} + 4 > 0$

(1)　$\cos x + \sin 2x = 0$

$\cos x + 2\sin x \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x + 1) = 0$

したがって　$\cos x = 0$，$\sin x = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$\cos x = 0$ より　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ より　$x = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(2)　$\cos x - 3\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} + 4 > 0$

$2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1 - 3\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} + 4 > 0$

$2\cos^2\dfrac{x}{2} - 3\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} + 3 > 0$

$\left(2\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\right)\left(\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\right) > 0$

$\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{3} < 0$ であるから　$2\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{3} < 0$　　すなわち　$\cos\dfrac{x}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より　$0 \leqq \dfrac{x}{2} < \pi$

よって　$\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{x}{2} < \pi$　より　$\dfrac{\pi}{3} < x < 2\pi$

PART2　三角関数の媒介変数表示

2　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ $(t \neq \pm 1)$のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(3)　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2)　$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$　より　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{1+t^2}$

よって　$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-1=\dfrac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(別解)

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ より　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

よって　$\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$　　すなわち　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ より

$t^2=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$　　$t^2(1+\cos\theta)=1-\cos\theta$　　$(1+t^2)\cos\theta=1-t^2$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　(1)，(2)より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

PART3　３倍角の公式とその利用

3 (1) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(2) 等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ が成り立つことを示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$5\theta=\pi$　すなわち　$2\theta=\pi-3\theta$

よって　$\sin 2\theta=\sin(\pi-3\theta)=\sin 3\theta$　より　$\sin 2\theta=\sin 3\theta$

(2) $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$$
$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

したがって　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

この等式と，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を(1)の等式に代入して

$$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin\theta=\sin\dfrac{\pi}{5}\neq 0$ より，$(*)$の両辺を $\sin\theta$ で割って

$$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$$
$$2\cos\theta=3-4(1-\cos^2\theta)$$
$$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{5}>0$ より　$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

第 10 講　三角関数の合成と最大・最小

PART1　三角関数の最大・最小（合成）

1　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

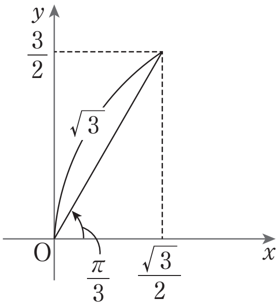
(2)　$y=3\sin\theta+4\cos\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(1)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta=\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta+\cos\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

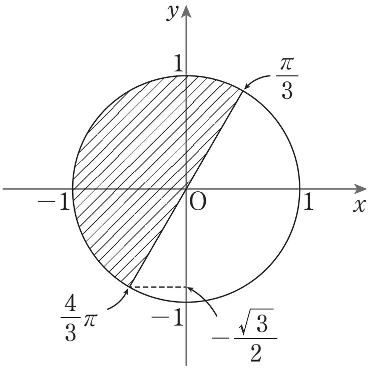


$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{4}{3}\pi$

よって　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$ であるから

$$-\frac{3}{2} \leqq \sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \leqq \sqrt{3}$$

したがって　最大値 $\sqrt{3}\ \left(\theta=\dfrac{\pi}{6}\right)$，最小値 $-\dfrac{3}{2}\ (\theta=\pi)$



(2)　$y=3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$

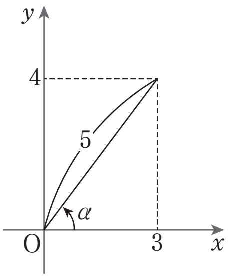
ただし，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

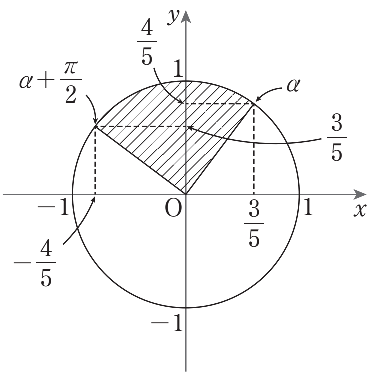
$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \alpha+\dfrac{\pi}{2}$

よって $\dfrac{3}{5} \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ であるから

$$3 \leqq 5\sin(\theta+\alpha) \leqq 5$$

したがって　最大値 5，最小値 3





PART2　三角関数の最大・最小（$t=\sin\theta-\cos\theta$）

2　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

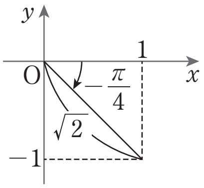
(3)　$y=\sin 2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ より

$$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$

(2)　$t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　より　$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

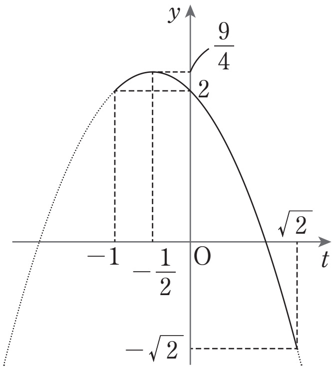
したがって　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$y=\sin 2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$

$=2\sin\theta\cos\theta-(\sin\theta-\cos\theta)+1$

$=2\cdot\dfrac{1-t^2}{2}-t+1$

$=-t^2-t+2=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$



$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ より

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　最大値 $\dfrac{9}{4}$

$t=\sqrt{2}$ のとき　最小値 $-\sqrt{2}$

PART3　三角関数の最大・最小（2 倍角・半角の公式）

3　$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x\ (0 \leqq x < \pi)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2$$

$$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$$

$0 \leqq x < \pi$ より　$0 \leqq 2x < 2\pi$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$

よって

$$-1 \leqq \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$$

$$-2 \leqq 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 2$$

したがって　$0 \leqq 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2 \leqq 4$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{6}$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$ より　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

ゆえに

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　最大値 4

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　最小値 0

第 11 講　指数の拡張，指数関数

PART1　指数の計算と式の値

1　(1)　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$a+a^{-1}$，$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

(2)　$3^x=5^y=\sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

(1)　$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}$

$=5^2-2\cdot 1=23$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}\right)$

$=5\cdot(23-1)=110$

(2)　$3^x=\sqrt{15}$ より　$3^x=15^{\frac{1}{2}}$

両辺を 2 乗して $(3^x)^2=15$　すなわち　$(3^2)^x=15$

両辺を $\dfrac{1}{x}$ 乗して　$3^2=15^{\frac{1}{x}}$ …… ①

$5^y=\sqrt{15}$ より　$5^y=15^{\frac{1}{2}}$

両辺を 2 乗して $(5^y)^2=15$　すなわち　$(5^2)^y=15$

両辺を $\dfrac{1}{y}$ 乗して　$5^2=15^{\frac{1}{y}}$ …… ②

①，②を辺々かけて

$15^{\frac{1}{x}}\cdot 15^{\frac{1}{y}}=3^2\cdot 5^2$　　$15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=(3\cdot 5)^2$　　$15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=15^2$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$

PART2　指数関数を含む方程式・不等式

2　[1]　次の方程式を解け。

(1)　$5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1=0$　　(2)　$3^x+3^{-x}=2$

[2]　次の不等式を解け。

(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-\dfrac{12}{3^x}+27<0$

[1]　(1)　$5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1=0$　より　$5\cdot(5^x)^2+4\cdot 5^x-1=0$

$5^x=t$ とおくと　$t>0$

$5t^2+4t-1=0$　　$(t+1)(5t-1)=0$

$t>0$ より　$t=\dfrac{1}{5}$　　よって　$5^x=5^{-1}$　より　$x=-1$

(2)　$3^x+3^{-x}=2$　より　$3^x+\dfrac{1}{3^x}=2$　　$(3^x)^2-2\cdot 3^x+1=0$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$

$t^2-2t+1=0$　　$(t-1)^2=0$

$t>0$ より　$t=1$　　よって　$3^x=1$　より　$x=0$

[2]　(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$　より　$(4^x)^2-4\cdot 4^x>0$

$4^x=t$ とおくと　$t>0$

$t^2-4t>0$　　$t(t-4)>0$

$t>0$ より　$t>4$　　よって　$4^x>4$

底 4 は 1 より大きいから　$x>1$

(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-\dfrac{12}{3^x}+27<0$　より　$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2-12\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+27<0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと　$t>0$

$t^2-12t+27<0$　　$(t-3)(t-9)<0$　　$3<t<9$　よって　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$-2<x<-1$

PART3 累乗根の大小，指数関数の最大・最小

3 [1] $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[5]{5}$ の大小を比較せよ。

[2] 関数 $y=4^x-2^{x+3}+4$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ。

[1] $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[5]{5}=5^{\frac{1}{5}}$

$2^{\frac{1}{2}}$ と $3^{\frac{1}{3}}$ をそれぞれ6乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\quad \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$$

よって $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6<\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6$

$2^{\frac{1}{2}}>0$，$3^{\frac{1}{3}}>0$ より $2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$

$2^{\frac{1}{2}}$ と $5^{\frac{1}{5}}$ をそれぞれ10乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^5=32,\quad \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}=5^2=25$$

よって $\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}<\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

$5^{\frac{1}{5}}>0$，$2^{\frac{1}{2}}>0$ より $5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}$

以上より $5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$ すなわち $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

[2] $y=4^x-2^{x+3}+4=(2^x)^2-8\cdot 2^x+4$

$2^x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 3$ より $1\leqq t\leqq 8$

このとき，y の式は

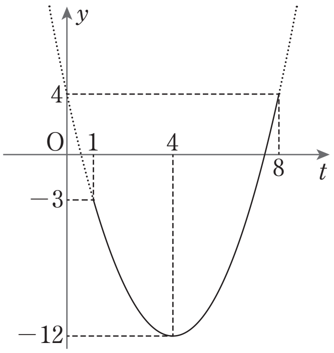
$$y=t^2-8t+4=(t-4)^2-12$$

$t=8$，つまり $2^x=8$ より

$x=3$ のとき 最大値 4

$t=4$，つまり $2^x=4$ より

$x=2$ のとき 最小値 -12



第 12 講　対数とその性質，対数関数

PART1　対数の計算と式の値

1　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)$ の値を求めよ。

$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ より

$$x+y=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10}$$

$$xy=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}=\frac{10-2}{4}=2$$

$$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy=\log_2 2=1$$

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)=\frac{\log_2(x^2-xy+y^2)}{\log_2\sqrt{2}}=\frac{\log_2\{(x+y)^2-3xy\}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_2(10-6)}{\frac{1}{2}}$$

$$=2\log_2 4=2\log_2 2^2=2\cdot2=4$$

PART2　対数関数を含む方程式・不等式

2　［1］　次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x-\log_9(x+2)=0$　　(2)　$\log_3 x+2\log_x 3=3$

［2］　次の不等式を解け。

(1)　$\log_2(3-x)\geqq\log_2 2x$　　(2)　$\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2-3<0$

［1］　(1)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+2>0$　　よって　$x>0$ …… ①

このとき，方程式を変形すると

$$\log_3 x-\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=0 \qquad \log_3 x-\frac{\log_3(x+2)}{2}=0$$

$$2\log_3 x-\log_3(x+2)=0 \qquad \log_3 x^2=\log_3(x+2)$$

よって　$x^2=x+2$　　$x^2-x-2=0$　　$(x-2)(x+1)=0$　　$x=2,\ -1$

①より　$x=2$

(2)　真数が正で，底は 1 でない正の数であるから　$x>0,\ x\neq 1$ …… ①

このとき，方程式を変形すると　$\log_3 x+2\cdot\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}=3$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t+\dfrac{2}{t}=3$　　$t^2-3t+2=0$　　$(t-1)(t-2)=0$　　$t=1,\ 2$

よって　$\log_3 x=1,\ 2$　　　したがって　$x=3,\ 9$　(①を満たす)

［2］　(1)　真数は正であるから　$3-x>0$ かつ $2x>0$　　よって　$0<x<3$ …… ①

底 2 は 1 より大きいから，不等式より　$3-x\geqq 2x$　　$x\leqq 1$

①より　$0<x\leqq 1$

(2)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^2>0$　　よって　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると　$\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x-3<0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$ とおくと　$t^2-2t-3<0$　　$(t+1)(t-3)<0$　　$-1<t<3$

よって　$-1<\log_{\frac{1}{3}}x<3$　　$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}<\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\dfrac{1}{27}<x<3$　(①を満たす)

PART3　対数の大小，対数関数の最大・最小

3　[1]　$\log_{\frac{1}{2}}3$，$\log_5 3$，$\log_7 3$，$\log_{\frac{1}{2}}5$ の大小を比較せよ。

[2]　次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=\left(\log_2\frac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\frac{4}{x}\right)$ $(2\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$ $(0\leqq x\leqq 3)$

[1]　$\log_{\frac{1}{2}}3$ と $\log_{\frac{1}{2}}5$ について

底 $\frac{1}{2}$ は0より大きく1より小さく，かつ $1<3<5$ であるから

$$\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}3<0$$

$\log_5 3$ と $\log_7 3$ について　$\log_5 3=\frac{1}{\log_3 5}$，$\log_7 3=\frac{1}{\log_3 7}$

底3は1より大きく，かつ $1<5<7$ であることから　$0<\log_3 5<\log_3 7$

よって　$0<\frac{1}{\log_3 7}<\frac{1}{\log_3 5}$　であるから

$$0<\log_7 3<\log_5 3$$

したがって　$\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_7 3<\log_5 3$

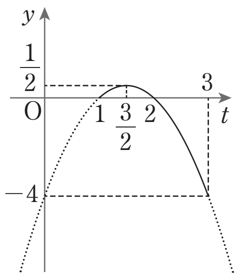
[2]　(1)　$y=\left(\log_2\frac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\frac{4}{x}\right)=(\log_2 x^2-\log_2 4)(\log_2 4-\log_2 x)$

$=(2\log_2 x-2)(2-\log_2 x)$

$\log_2 x=t$ とおくと　$2\leqq x\leqq 8$　より　$1\leqq t\leqq 3$

このとき，y の式は

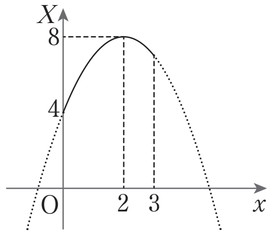
$$y=(2t-2)(2-t)=-2t^2+6t-4=-2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$



$t=\frac{3}{2}$　つまり　$\log_2 x=\frac{3}{2}$　より　$x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ のとき　最大値 $\frac{1}{2}$

$t=3$　つまり　$\log_2 x=3$　より　$x=2^3=8$ のとき　最小値 -4

(2)　$X=-x^2+4x+4$ とおくと　$X=-(x-2)^2+8$



$0\leqq x\leqq 3$　より　$4\leqq X\leqq 8$

このとき　$y=\log_2(-x^2+4x+4)=\log_2 X$ は

$X=8$ つまり $x=2$ のとき　最大値 $\log_2 8=3$

$X=4$ つまり $x=0$ のとき　最小値 $\log_2 4=2$

をとる。

第 13 講　指数・対数関数の様々な問題

PART1　指数・対数と式の値

1　(1)　$16^{\log_2 3}$ の値を求めよ。

(2)　$2^x=3^y=12^z$，$xyz\neq 0$ のとき，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

(1)　$16^{\log_2 3}=M$ とおく。

左辺は正より，両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 16^{\log_2 3}=\log_2 M$$

$$\log_2 3\cdot\log_2 16=\log_2 M$$

$$4\log_2 3=\log_2 M$$

$$\log_2 3^4=\log_2 M$$

よって　$M=3^4=81$　より　$16^{\log_2 3}=81$

(別解)

$16^{\log_2 3}=2^{4\log_2 3}=2^{\log_2 3^4}=3^4=81$

(2)　$2^x=3^y=12^z$ の各辺は正であるから，各辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 2^x=\log_2 3^y=\log_2 12^z$$

すなわち　$x=y\log_2 3=z\log_2 12$

$xyz\neq 0$　より　$x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ かつ $z\neq 0$

よって　$y=\dfrac{x}{\log_2 3}$　より　$\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_2 3}{x}$

$$z=\frac{x}{\log_2 12}=\frac{x}{\log_2(2^2\cdot 3)}=\frac{x}{2+\log_2 3}\quad より\quad \frac{1}{z}=\frac{2+\log_2 3}{x}$$

したがって　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\log_2 3}{x}-\dfrac{2+\log_2 3}{x}=0$

PART2　常用対数

2　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

［1］　18^{20} の桁数を求めよ。また，最高位の数字，および一の位の数字を求めよ。

［2］　(1)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁であるような整数 n の値の範囲を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

［1］　$\log_{10}18^{20}=20\log_{10}(2\cdot3^2)=20(\log_{10}2+2\log_{10}3)=20(0.3010+2\times0.4771)=25.104$

よって　$25<\log_{10}18^{20}<26$　より　$10^{25}<18^{20}<10^{26}$

したがって，18^{20} は 26 桁の数である。

$\log_{10}18^{20}=25.104$ より　$18^{20}=10^{25.104}=10^{0.104}\times10^{25}$

$10^0=1$，$10^{0.3010}=2$　より　$1<10^{0.104}<2$

よって，$1\times10^{25}<18^{20}<2\times10^{25}$ より，18^{20} の最高位の数字は 1

18^n の一の位は，$n=1$，2，3，4，5，……　のとき 8，4，2，6，8，……　であり，

4 つの数 8，4，2，6 を順に繰り返す。

$18^{20}=18^{4\times5}$ であるから，18^{20} の一の位の数字は 6

［2］　(1)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁のとき

$10^1\leqq(1.25)^n<10^2$　すなわち　$1\leqq\log_{10}(1.25)^n<2$

$\log_{10}(1.25)^n=n\log_{10}1.25=n\log_{10}\dfrac{125}{100}=n\log_{10}\dfrac{10}{8}$

$=n(\log_{10}10-\log_{10}2^3)=n(1-3\log_{10}2)=n(1-3\times0.3010)=0.097n$

よって　$1\leqq0.097n<2$ より　$\dfrac{1}{0.097}\leqq n<\dfrac{2}{0.097}$　　$10.3\cdots\cdots\leqq n<20.6\cdots\cdots$

したがって，求める整数 n の値の範囲は $11\leqq n\leqq20$

(2)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{10000}$　より　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\log_{10}\dfrac{1}{10000}$　　$-n\log_{10}2<-4$

よって　$n>\dfrac{4}{\log_{10}2}=13.2\cdots\cdots$ より，求める自然数 n の最小値は $n=14$

PART3　指数関数・対数関数の最大・最小

3　[1]　関数 $y=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})-3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，$t\geqq 2$ であることを示せ。

(2)　y を t を用いて表せ。また，y の最小値を求めよ。

[2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y+\log_y x$ の最小値を求めよ。

[1]　(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=-x$　より　$x=0$ のとき

よって　$t\geqq 2$

(2)　$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2$

よって　$y=t^2-2-t-3=t^2-t-5$

$y=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}$ $(t\geqq 2)$　より，$t=2$ つまり $x=0$ のとき　最小値 -3

[2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y>0$，$\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係から

$$\log_x y+\log_y x=\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\geqq 2\sqrt{\log_x y\cdot\frac{1}{\log_x y}}=2$$

等号成立は　$\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}$　　$(\log_x y)^2=1$

$\log_x y>0$ より　$\log_x y=1$　　よって　$x=y$ のとき

したがって，求める最小値は 2

第 14 講　微分係数と導関数

PART1　平均変化率と微分係数

1　$f(x)=x^3-3x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x=1$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　$x=c$ から $x=c+h$ $(h \neq 0)$ まで変化するときの平均変化率を求め，その結果を用いて，$x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた微分係数が，(1)で求めた平均変化率と等しいとき，c の値を求めよ。

(1)　$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=(2^3-3\cdot2)-(1^3-3\cdot1)=4$

(2)　平均変化率は

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{\{(c+h)^3-3(c+h)\}-(c^3-3c)}{h}$$

$$=\frac{3c^2h+3ch^2+h^3-3h}{h}=3c^2+3ch+h^2-3$$

よって　$f'(c)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to0}(3c^2+3ch+h^2-3)=3c^2-3$

(3)　$3c^2-3=4$　より　$c^2=\dfrac{7}{3}$　　よって　$c=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

PART2　接線の方程式

2　(1)　曲線 $y=x^3-5x+1$ 上の点 A(2, −1) における接線の方程式，および法線の方程式を求めよ。

(2)　点 (1, 8) から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ。また，求めた接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の座標を求めよ。

(1)　$f(x)=x^3-5x+1$ とおくと　$f'(x)=3x^2-5$

点 A における接線の傾きは　$f'(2)=7$　　法線の傾きは $-\dfrac{1}{7}$

よって，求める接線の方程式は

$$y=7(x-2)-1 \quad すなわち \quad y=7x-15$$

法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{7}(x-2)-1 \quad すなわち \quad y=-\frac{1}{7}x-\frac{5}{7}$$

(2)　$f(x)=x^3-x^2-8x+8$ とおくと　$f'(x)=3x^2-2x-8$

接点の座標を $(a,\ a^3-a^2-8a+8)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=3a^2-2a-8$

よって，接線の方程式は

$$y=(3a^2-2a-8)(x-a)+a^3-a^2-8a+8$$

すなわち　$y=(3a^2-2a-8)x-2a^3+a^2+8$ ……①

①が点 (1, 8) を通るので

$$8=3a^2-2a-8-2a^3+a^2+8 \qquad a^3-2a^2+a+4=0 \qquad (a+1)(a^2-3a+4)=0$$

$$a^2-3a+4=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0 \quad より \quad a=-1$$

したがって，求める接線の方程式は，①より　$y=-3x+11$

この接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の x 座標は，方程式

$$x^3-x^2-8x+8=-3x+11$$

の $x=-1$ 以外の実数解である。

$$x^3-x^2-5x-3=0 \qquad (x+1)(x^2-2x-3)=0 \qquad (x+1)^2(x-3)=0 \qquad x=-1,\ 3$$

よって，求める共有点の座標は (3, 2)

PART3　共通接線

3　[1]　2 つの放物線 $y=x^2-2x+2$, $y=-x^2+8x-11$ の共通接線の方程式を求めよ。

[2]　2 曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax-20$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。

また，その接点における共通接線の方程式を求めよ。

[1]　$f(x)=x^2-2x+2$ とおくと　$f'(x)=2x-2$

よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(s,\ s^2-2s+2)$ における接線の方程式は

$$y=(2s-2)(x-s)+s^2-2s+2 \quad \text{すなわち} \quad y=(2s-2)x-s^2+2 \cdots\cdots ①$$

$g(x)=-x^2+8x-11$ とおくと　$g'(x)=-2x+8$

よって，放物線 $y=g(x)$ 上の点 $(t,\ -t^2+8t-11)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+8)(x-t)-t^2+8t-11 \quad \text{すなわち} \quad y=(-2t+8)x+t^2-11 \cdots\cdots ②$$

①と②が一致するとき，係数を比較して

$$\begin{cases} 2s-2=-2t+8 \\ -s^2+2=t^2-11 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (s,\ t)=(3,\ 2),\ (2,\ 3)$$

よって，求める共通接線の方程式は　$y=2x-2$，$y=4x-7$

[2]　$f(x)=x^3-3x$，$g(x)=-x^2+ax-20$ とおくと　$f'(x)=3x^2-3$，$g'(x)=-2x+a$

2 曲線が $x=\alpha$ の点で接するための条件は

$$f(\alpha)=g(\alpha) \cdots\cdots ① \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha)=g'(\alpha) \cdots\cdots ②$$

①より　$\alpha^3-3\alpha=-\alpha^2+a\alpha-20 \cdots\cdots ①'$

②より　$3\alpha^2-3=-2\alpha+a$　すなわち　$a=3\alpha^2+2\alpha-3 \cdots\cdots ②'$

②′を①′に代入して

$$\alpha^3-3\alpha=-\alpha^2+(3\alpha^2+2\alpha-3)\alpha-20 \qquad 2\alpha^3+\alpha^2-20=0$$

$$(\alpha-2)(2\alpha^2+5\alpha+10)=0$$

$$2\alpha^2+5\alpha+10=2\left(\alpha+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{55}{8}>0 \quad \text{より} \quad \alpha=2$$

このとき②′より　$a=13$

$\alpha=2$ のとき　$f(2)=2$，$f'(2)=9$

よって，求める共通接線の方程式は　$y=9(x-2)+2$　　すなわち　$y=9x-16$

第 15 講　導関数の応用

PART1　関数の極大・極小

1　[1]　3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる。このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

[2]　(1)　関数 $f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(2)　関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ。

[1]　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極小値 -2 をとるから　　$f'(1)=0$，$f(1)=-2$

$x=3$ で極大値 2 をとるから　　$f'(3)=0$，$f(3)=2$

よって　$3a+2b+c=0$，$a+b+c+d=-2$，$27a+6b+c=0$，$27a+9b+3c+d=2$

これを解いて　$a=-1$，$b=6$，$c=-9$，$d=2$

このとき

$$f(x)=-x^3+6x^2-9x+2,\quad f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

よって，$f(x)$ の増減表は右図となり，確かに $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる。

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

したがって

$$a=-1,\quad b=6,\quad c=-9,\quad d=2$$

(別解)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

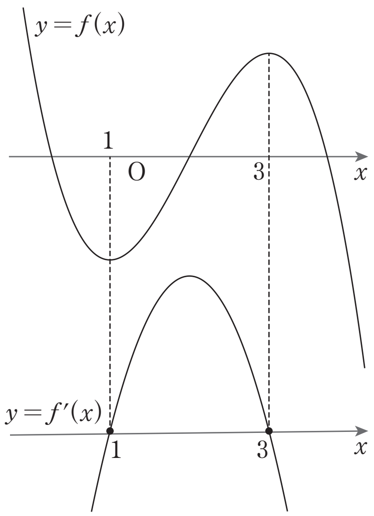
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \cdots\cdots ①$$

$f(x)$ が $x=1$ で極小値，$x=3$ で極大値をとり，①より $f'(x)$ の x^2 の係数が $3a$ であることから

$$f'(x)=3a(x-1)(x-3)$$
$$=3ax^2-12ax+9a\ (a<0) \cdots\cdots ②$$

と表せる。

①と②を係数比較して　$2b=-12a$，$c=9a$



よって　$b=-6a$

このとき　$f(x)=ax^3-6ax^2+9ax+d$　であるから，

$f(1)=-2$，$f(3)=2$ より　$4a+d=-2$，$d=2$

よって　$a=-1$，$b=6$，$c=-9$，$d=2$（$a<0$ を満たす）

［2］ (1)　$f'(x)=3x^2+2(a-2)x-3a$

$f(x)$ が極値をもつための条件は $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+9a>0 \qquad a^2+5a+4>0 \qquad (a+4)(a+1)>0$$

したがって　$a<-4$，$-1<a$

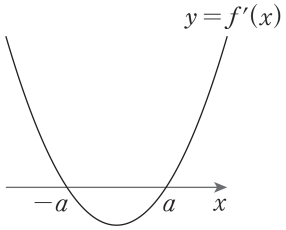
(2)　$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$a>0$ のとき　$x=-a$ で極大値 $2a^3$，$x=a$ で極小値 $-2a^3$ をとる。

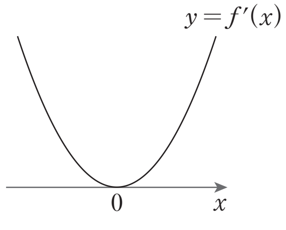
$a=0$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加。よって，極値はない。

$a<0$ のとき　$x=a$ で極大値 $-2a^3$，$x=-a$ で極小値 $2a^3$ をとる。

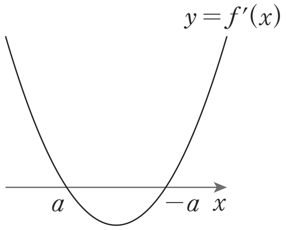
$a>0$ のとき



$a=0$ のとき



$a<0$ のとき



PART2　絶対値を含む関数のグラフ

2　関数 $y=x^3-3|x^2-1|-1$ のグラフをかけ。

$y=x^3-3|x^2-1|-1$

$$=\begin{cases} x^3-3(x^2-1)-1=x^3-3x^2+2=f_1(x) & (x\leqq -1,\ 1\leqq x) \\ x^3+3(x^2-1)-1=x^3+3x^2-4=f_2(x) & (-1\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

とおく。

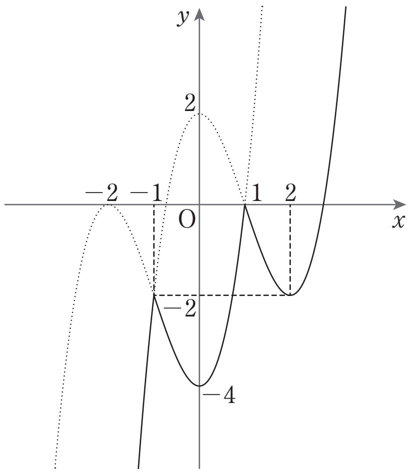
$$y'=\begin{cases} f_1{}'(x)=3x^2-6x=3x(x-2) & (x<-1,\ 1<x) \\ f_2{}'(x)=3x^2+6x=3x(x+2) & (-1<x<1) \end{cases}$$

$f_1{}'(x)=0$ とすると　$x=2$

$f_2{}'(x)=0$ とすると　$x=0$

y の増減表は以下。グラフは右図実線部分。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	／	$-$	0	$+$	／	$-$	0	$+$
y	↗	極大 -2	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘	極小 -2	↗



PART3　3次関数の最大・最小

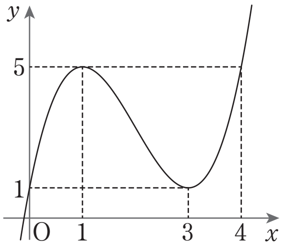
3　$a>0$ とする。$0 \leqq x \leqq a$ において，関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 3$

よって，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	極大 5	↘	極小 1	↗



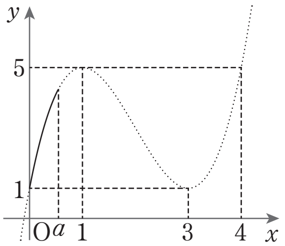
$f(x)=5$ より　$x^3-6x^2+9x+1=5$　　$(x-1)^2(x-4)=0$

よって　$x=1,\ 4$

(i)　$0<a<1$ のとき

右図より $f(x)$ は $x=a$ のとき最大となり

$M(a)=f(a)=a^3-6a^2+9a+1$



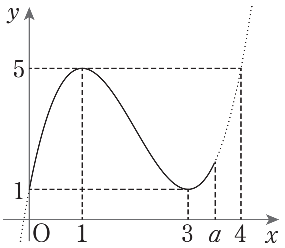
(ii)　$1 \leqq a \leqq 4$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ における $y=f(x)$ のグラフは

右図実線部分。

よって，$f(x)$ は $x=1$ のとき最大となり

$M(a)=f(1)=5$



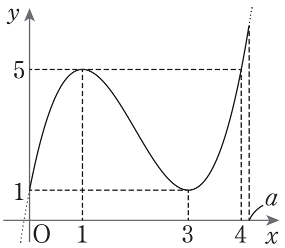
(iii)　$4<a$ のとき

$0 \leqq x \leqq a$ における $y=f(x)$ のグラフは

右図実線部分。

よって，$f(x)$ は $x=a$ のとき最大となり

$$M(a)=f(a)=a^3-6a^2+9a+1$$



(i)～(iii)より

$$M(a)=\begin{cases} a^3-6a^2+9a+1 & (0<a<1,\ 4<a) \\ 5 & (1 \leqq a \leqq 4) \end{cases}$$

第 16 講　方程式・不等式への応用

PART1　高次方程式の実数解の個数

1　x についての方程式 $3x^4-4x^3-12x^2-a=0$ が次の条件を満たすような，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　4 個の異なる実数解をもつ。

(2)　異なる実数解を 2 個だけもち，それらがともに正の数である。

方程式を変形すると $3x^4-4x^3-12x^2=a$

よって，この方程式の異なる実数解およびその個数は

4 次関数　$y=3x^4-4x^3-12x^2$ …… ①

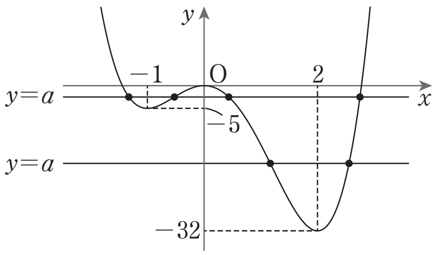
のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標および個数と一致する。

①より

$$y'=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$$
$$=12x(x+1)(x-2)$$

よって，①の増減表は以下。①のグラフは右図。

x	…	-1	…	0	…	2	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗



①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標および個数を考える。

(1)　グラフより $-5<a<0$

(2)　グラフより $-32<a<-5$

PART2　3本の接線が引けるための条件

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に3本の接線が引けるための $a,\ b$ の満たすべき条件を求めよ。また，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

$y=x^3-3x$ より　$y'=3x^2-3$

よって，曲線上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t \quad \text{すなわち} \quad y=(3t^2-3)x-2t^3 \cdots\cdots ①$$

①が点 $(a,\ b)$ を通るとき

$$b=(3t^2-3)a-2t^3 \qquad \text{すなわち} \quad 2t^3-3at^2+3a+b=0 \cdots\cdots ②$$

3次関数のグラフにおいては，接点が異なれば接線も異なる。

よって，点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に3本の接線が引けるための条件は，t の3次方程式②が異なる3つの実数解をもつことである。

したがって，$f(t)=2t^3-3at^2+3a+b$ とおくと，

$f(t)$ の(極大値)×(極小値)<0 となるときである。

$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a=0$ のとき　$f'(t)=6t^2\geqq 0$ より $f(t)$ は単調増加である。

よって　3次方程式②の実数解は1つで，不適。

$a\neq 0$ のとき　$f(t)$ は2つの極値 $f(0)$，$f(a)$ をもつ。

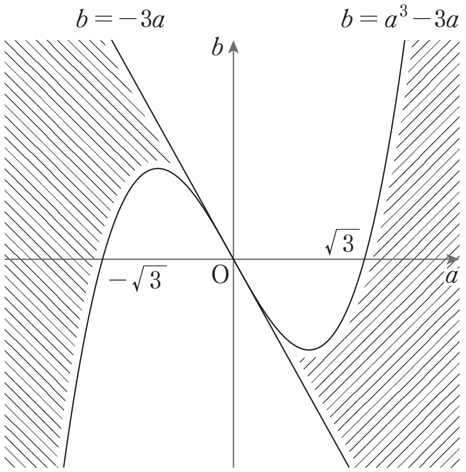
よって　$f(0)f(a)<0$ より

$$(3a+b)(-a^3+3a+b)<0$$

すなわち $\begin{cases} 3a+b>0 \\ -a^3+3a+b<0 \end{cases}$

または $\begin{cases} 3a+b<0 \\ -a^3+3a+b>0 \end{cases}$

つまり $\begin{cases} b>-3a \\ b<a^3-3a \end{cases}$ または $\begin{cases} b<-3a \\ b>a^3-3a \end{cases}$



したがって，求める点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図斜線部分(境界は含まない)。

PART3　不等式を満たす定数の値の範囲

3　$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $x^3-ax^2+a^2 \geqq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^3-ax^2+a^2$ とおく。

$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $x^3-ax^2+a^2 \geqq 0$ が成り立つのは，$x \geqq 0$ において

　$(f(x)$ の最小値$) \geqq 0$ ……①

のときである。

$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$　$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ \dfrac{2}{3}a$

$\dfrac{2}{3}a<0$　すなわち $a<0$ のとき

x	0	…
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	a^2	↗

　$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=a^2$

　$a^2 \geqq 0$ であり，これはすべての実数 a で成り立ち，$f(0) \geqq 0$

　よって，$a<0$ のとき①は成り立つ。

$\dfrac{2}{3}a=0$　すなわち $a=0$ のとき

　$f'(x)=3x^2 \geqq 0$ より，$f(x)$ は単調増加であるから，

　$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=a^2=0$

　よって，$a=0$ のとき①は成り立つ。

$\dfrac{2}{3}a>0$　すなわち $a>0$ のとき

x	0	…	$\dfrac{2}{3}a$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a^2	↘	$-\dfrac{4}{27}a^3+a^2$	↗

　$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は右図となり，

　$f(x)$ の最小値は

$$f\left(\frac{2}{3}a\right)=\left(\frac{2}{3}a\right)^3-a\left(\frac{2}{3}a\right)^2+a^2=-\frac{4}{27}a^3+a^2$$

　したがって　$-\dfrac{4}{27}a^3+a^2 \geqq 0$　　$a^2\left(a-\dfrac{27}{4}\right) \leqq 0$

　$a^2>0$ であるから　$a-\dfrac{27}{4} \leqq 0$　　よって，$0<a \leqq \dfrac{27}{4}$ のとき①は成り立つ。

以上より，求める a の値の範囲は　$a \leqq \dfrac{27}{4}$

第 17 講　不定積分，定積分

PART1　定積分の性質

1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt-\int_{2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-3}^{1}$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot1^3+\frac{1}{2}\cdot1^2+1\right)-\left\{\frac{2}{3}\cdot(-3)^3+\frac{1}{2}\cdot(-3)^2+(-3)\right\}=\frac{56}{3}$$

（別解）

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx=\int_{-3}^{1}2x^2\,dx+\int_{-3}^{1}xdx+\int_{-3}^{1}dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-3}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{1}+[x]_{-3}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}\{1^3-(-3)^3\}+\frac{1}{2}\{1^2-(-3)^2\}+\{1-(-3)\}=\frac{56}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt-\int_{2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt=\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt+\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)dt$

$$=\int_{-2}^{2}(t+1)(t^2-1)dt=\int_{-2}^{2}(t^3+t^2-t-1)dt$$

$$=2\int_{0}^{2}(t^2-1)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{0}^{2}=2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{4}{3}$$

PART2　絶対値を含む関数の定積分

2　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{3} x|x-2|dx$

(2)　$\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|dx$

(1)　$x|x-2|=\begin{cases} -x(x-2)=-x^2+2x & (-1\leqq x\leqq 2) \\ x(x-2)=x^2-2x & (2\leqq x\leqq 3) \end{cases}$ であるから

$$\int_{-1}^{3} x|x-2|dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}$$

$$=-\frac{1}{3}(8+1)+(4-1)+\frac{1}{3}(27-8)-(9-4)=\frac{4}{3}$$

(2)　$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ より，

$|x^2-3x+2|=\begin{cases} x^2-3x+2 & (0\leqq x\leqq 1) \\ -x^2+3x-2 & (1\leqq x\leqq 2) \\ x^2-3x+2 & (2\leqq x\leqq 3) \end{cases}$ であるから

$$\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx=\int_{0}^{1}(x^2-3x+2)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\frac{1}{3}(8-1)+\frac{3}{2}(4-1)-2(2-1)$$

$$+\frac{1}{3}(27-8)-\frac{3}{2}(9-4)+2(3-2)$$

$$=\frac{11}{6}$$

PART3　定積分で表された関数の決定

3　[1]　等式 $f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

[2]　x の関数 $f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$ の極値を求めよ。

[1]　$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1=\int_0^1 tf(t)dt+x\int_0^1 f(t)dt+1$

$\int_0^1 f(t)dt=a$，$\int_0^1 tf(t)dt=b$ とおくと　$f(x)=ax+b+1$

このとき

$$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(at+b+1)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+(b+1)t\right]_0^1=\frac{a}{2}+b+1$$

$$b=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(at+b+1)dt=\int_0^1\{at^2+(b+1)t\}dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b+1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b+1}{2}$$

これより　$a-2b=2$，$2a-3b=-3$　　　よって　$a=-12$，$b=-7$

したがって　$f(x)=-12x-6$

[2]　$f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t(t^2-1)dt=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1$，0，1

$f(x)$ の増減表は右のとおり

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

ここで　$f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt=\int_0^x(t^3-t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$　より

$$f(-1)=-\frac{1}{4},\ f(0)=0,\ f(1)=-\frac{1}{4}$$

よって，$x=0$ で極大値 0，$x=-1$，1 で極小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。

第 18 講　定積分と面積

PART1　放物線と x 軸の間の面積

1　［1］ (1)　等式 $\displaystyle\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$（$C$ は定数）を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

［2］ (1)　等式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

［1］ (1)　C' を定数とすると

$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\int(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx=\frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+\alpha^2x+C'$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3)+\frac{\alpha^3}{3}+C'=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha^3}{3}+C'$$

$\dfrac{\alpha^3}{3}+C'$ は定数であるから　$\displaystyle\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$（$C$ は定数）が成り立つ。

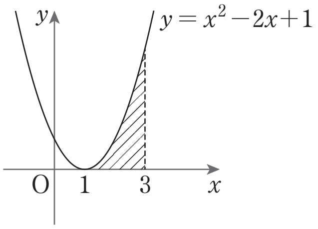
(2)　放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸の共有点の x 座標は

$x^2-2x+1=0$　　$(x-1)^2=0$　　$x=1$

グラフより，求める面積は

$$\int_1^3(x^2-2x+1)dx=\int_1^3(x-1)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3$$

$$=\frac{8}{3}$$



［2］ (1)　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$

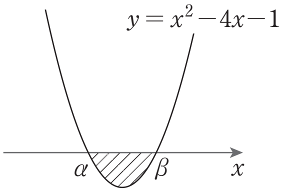
$$=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)　放物線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$x^2-4x-1=0 \quad より \quad x=2\pm\sqrt{5}$$



$\alpha=2-\sqrt{5}$，$\beta=2+\sqrt{5}$ とおくと，

右図より，求める面積は

$$-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x-1)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{5})^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}$$

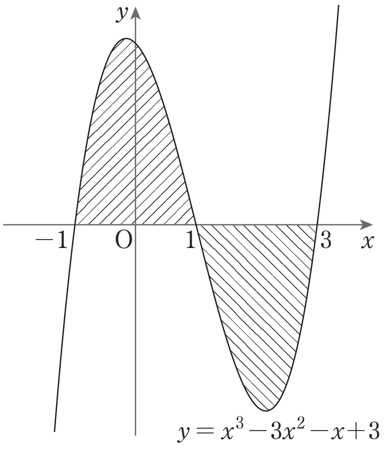
PART2　3 次関数のグラフと x 軸の間の面積

2　曲線 $y=x^3-3x^2-x+3$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

曲線 $y=x^3-3x^2-x+3$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$x^3-3x^2-x+3=0 \qquad (x+1)(x-1)(x-3)=0 \qquad x=-1,\ 1,\ 3$$

右図より，求める面積は



$$\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)dx-\int_{1}^{3}(x^3-3x^2-x+3)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx-\int_{1}^{3}(x^3-3x^2-x+3)dx$$

$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1-\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_1^3$$

$$=2(-1+3)-\left\{\frac{1}{4}(81-1)-(27-1)-\frac{1}{2}(9-1)+3(3-1)\right\}$$

$$=4+4=8$$

（面積を求める計算の別解）

$$\begin{aligned}x^3-3x^2-x+3&=(x+1)(x-1)(x-3)\\&=\{(x-1)+2\}(x-1)\{(x-1)-2\}\\&=(x-1)\{(x-1)^2-4\}\\&=(x-1)^3-4(x-1)\end{aligned}$$

求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(x-1)^3-4(x-1)\}dx-\int_{1}^{3}\{(x-1)^3-4(x-1)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-2(x-1)^2\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-2(x-1)^2\right]_1^3$$

$$=-\left\{\frac{1}{4}(-1-1)^4-2(-1-1)^2\right\}-\left\{\frac{1}{4}(3-1)^4-2(3-1)^2\right\}$$

$$=4+4=8$$

PART3　変数を含む定積分の最大・最小

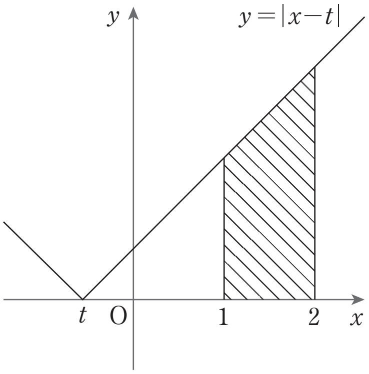
3　$f(t)=\int_1^2 |x-t|dx$ とするとき，$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

(i)　$t \leqq 1$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2$ においては　$x-t \geqq 0$

よって

$$f(t)=\int_1^2 (x-t)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_1^2=-t+\frac{3}{2}$$



(ii)　$1<t<2$ のとき

$1 \leqq x \leqq t$ では　$x-t \leqq 0$

$t \leqq x \leqq 2$ では　$x-t \geqq 0$

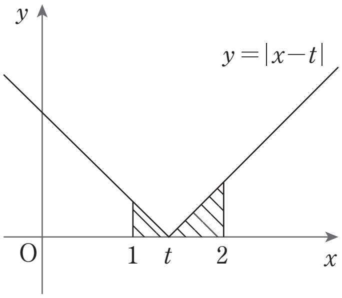
よって

$$f(t)=-\int_1^t (x-t)dx+\int_t^2 (x-t)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_1^t+\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_t^2$$

$$=-\left(\frac{1}{2}t^2-t^2\right)\times 2+\left(\frac{1}{2}-t\right)+(2-2t)$$

$$=t^2-3t+\frac{5}{2}$$

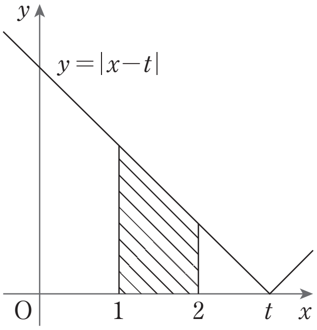


(iii)　$2 \leqq t$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2$ においては　$x-t \leqq 0$

よって

$$f(t)=-\int_1^2 (x-t)dx=-\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_1^2=t-\frac{3}{2}$$

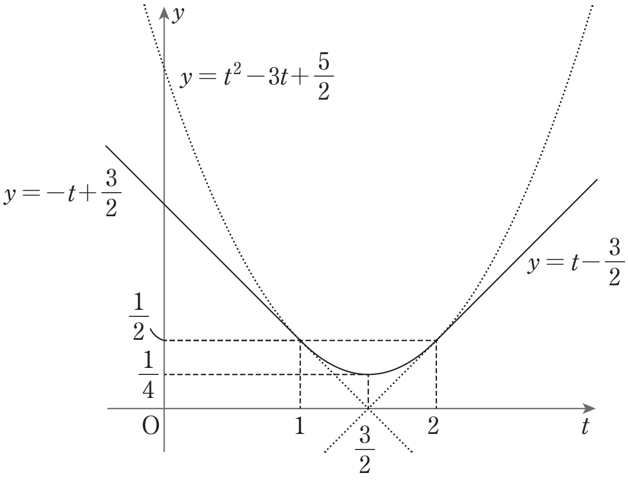


(i)～(iii)より

$$f(t)=\begin{cases}-t+\dfrac{3}{2} & (t\leqq 1)\\ t^2-3t+\dfrac{5}{2}=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} & (1<t<2)\\ t-\dfrac{3}{2} & (2\leqq t)\end{cases}$$

よって，$y=f(t)$ のグラフは下図。

したがって，$f(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。



第19講　2 曲線と面積

PART1　曲線と接線の間の面積

1　[1]　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[2]　曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[1]　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-x^2+2x+3=0 \qquad (x+1)(x-3)=0 \qquad x=-1,\ 3$$

直線 $y=-2x+7$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-2x+7=0 \qquad x=\frac{7}{2}$$

放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$ の共有点の x 座標は

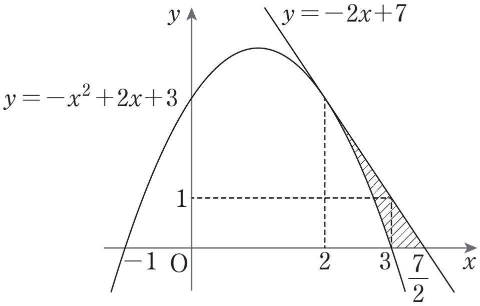
$$-x^2+2x+3=-2x+7$$

より

$$x^2-4x+4=0 \qquad (x-2)^2=0 \qquad x=2$$

よって，$x=2$ において接する。

右図より，求める面積は



$$\int_2^3\{(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\}dx$$

$$+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=\int_2^3(x^2-4x+4)dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_2^3+\left[-x^2+7x\right]_3^{\frac{7}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(27-8)-2(9-4)+4(3-2)-\left(\frac{49}{4}-9\right)+7\left(\frac{7}{2}-3\right)=\frac{7}{12}$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_2^3 \{(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\}dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=\int_2^3 (x-2)^2 dx+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}-3\right)\cdot 1=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^3+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

［2］ $y'=3x^2-4$ より，$x=1$ のとき $y'=-1$

よって，点 $(1,\ -3)$ における接線の方程式は

$y=-(x-1)-3$　すなわち　$y=-x-2$

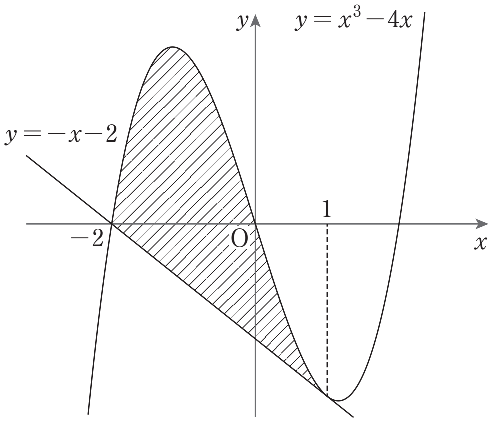
この接線と曲線の共有点の x 座標は

$x^3-4x=-x-2$

より

$x^3-3x+2=0$　　　$(x-1)^2(x+2)=0$

$x=1,\ -2$



右図より，求める面積は

$$\int_{-2}^1 \{(x^3-4x)-(-x-2)\}dx=\int_{-2}^1 (x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$

$$=\frac{1}{4}(1-16)-\frac{3}{2}(1-4)+2(1+2)=\frac{27}{4}$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_{-2}^1 \{(x^3-4x)-(-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^1 (x-1)^2(x+2)dx=\int_{-2}^1 (x-1)^2\{(x-1)+3\}dx$$

$$=\int_{-2}^1 \{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^1=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}$$

PART2　面積を 2 等分

2　放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積が直線 $y=ax$ で 2 等分されるとき，a の値を求めよ。ただし，$0<a<3$ とする。

放物線 $y=-x^2+3x=-x(x-3)$ と x 軸の共有点の x 座標は

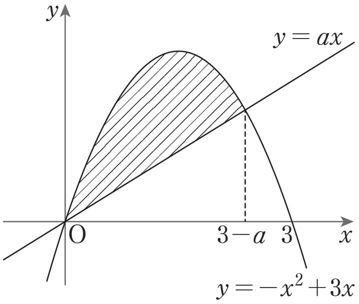
$$x=0,\ 3$$

放物線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は

$$-x^2+3x=ax$$

より

$$x^2+(a-3)x=0 \qquad x(x+a-3)=0 \qquad x=0,\ 3-a$$



よって，放物線と直線は右図。

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S，放物線と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると，求める条件は　$S=2S(a)$

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=-\int_0^3 x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

$$S(a)=\int_0^{3-a}(-x^2+3x-ax)dx=-\int_0^{3-a}x(x+a-3)dx=\frac{1}{6}(3-a)^3$$

よって　$\dfrac{9}{2}=2\cdot\dfrac{1}{6}(3-a)^3$　　$(3-a)^3=\dfrac{27}{2}$

a は実数であるから　$3-a=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

したがって　$a=3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$（$0<a<3$ を満たす）

PART3　面積の最大・最小

3　放物線 $y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ の最小値を求めよ。

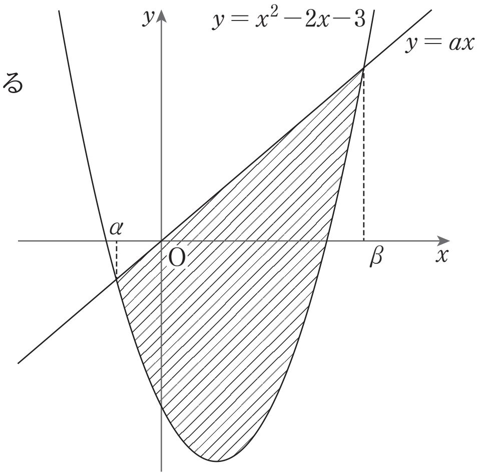
放物線 $y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は

$$x^2-2x-3=ax \quad \text{すなわち} \quad x^2-(a+2)x-3=0$$

の実数解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(a+2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=(a+2)^2+12$$

より，常に $D>0$ であるから，放物線と直線は常に異なる 2 交点をもつ。2 交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$とすると



$$S(a)=\int_\alpha^\beta\{ax-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\{x^2-(a+2)x-3\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで

$$\beta-\alpha=\frac{a+2+\sqrt{D}}{2}-\frac{a+2-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}=\sqrt{(a+2)^2+12}$$

であるから，$a=-2$ のとき最小となり，このとき $S(a)$ も最小となる。

よって，その最小値は

$$S(-2)=\frac{1}{6}(\sqrt{12})^3=4\sqrt{3}$$

[MEMO]

[MEMO]

確認問題　解答

第 1 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3，ウ：3，エ：3

[解説]

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ であるから [A]

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

よって　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

[A]　3 次式の展開
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2

[正解] オ：3，カ：③，キ：①，ク：①，ケ：3

[解説]

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc \quad \text{[B]}$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$
$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c) \quad \text{[C]}$$
$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

[B]　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

[C]　3 次式の因数分解
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

3

[正解] コ：3，サ：1，シ：3，ス：9，セ：3，ソ：1

[解説]

$$x^3+27y^3-1+9xy$$
$$=x^3+(3y)^3+(-1)^3-3\cdot x\cdot 3y\cdot(-1)$$
$$=(x+3y-1)\{x^2+(3y)^2+(-1)^2-x\cdot 3y-3y\cdot(-1)-(-1)\cdot x\} \quad \text{[D]}$$
$$=(x+3y-1)(x^2+9y^2+1-3xy+3y+x)$$
$$=(x+3y-1)(x^2-3xy+9y^2+x+3y+1)$$

[D]　3 次式の因数分解
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

第 1 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イウ：10，エオ：10，カ：5，キ：1

[解説]

$(1+x)^5$

$={}_5C_0+{}_5C_1x+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+{}_5C_5x^5$　[A]

$=1+5x+\dfrac{5\cdot 4}{2}x^2+\dfrac{5\cdot 4}{2}x^3+5x^4+x^5$

$=x^5+\mathbf{5}x^4+\mathbf{10}x^3+\mathbf{10}x^2+\mathbf{5}x+\mathbf{1}$

[A]　二項定理

$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b$
$+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$
$+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots$
$+{}_nC_nb^n$

$(a+b)^n$ の展開式の一般項

${}_nC_ra^{n-r}b^r$

2

[正解] ク：⑧

[解説]

二項定理により

$(1+x)^n$

$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$　[A]

これに $x=4$ を代入すると

$(1+4)^n$

$={}_nC_0+{}_nC_1\cdot 4+{}_nC_2\cdot 4^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot 4^n$

よって

${}_nC_0+4{}_nC_1+4^2{}_nC_2+\cdots\cdots+4^n{}_nC_n=\mathbf{5^n}$

3 **[正解]** ケ：1，コサ：32

[解説]

二項定理により

$$(1+x)^n$$
$$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$$ [A]

これに $x=-\dfrac{1}{2}$，$n=5$ を代入すると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^5={}_5C_0+{}_5C_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_5C_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_5C_5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

よって　$${}_5C_0-\frac{{}_5C_1}{2}+\frac{{}_5C_2}{4}+\cdots\cdots+(-1)^5\frac{{}_5C_5}{2^5}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\boldsymbol{\frac{1}{32}}$$

4 **[正解]** シスセソ：-120

[解説]

$(2x+y-z)^6=\{(2x+y)-z\}^6$ の展開式において，

z^3 を含む項は

$${}_6C_3(2x+y)^3(-z)^3=-20(2x+y)^3z^3$$ [A]

さらに，$(2x+y)^3$ の展開式において，xy^2 の項は

$${}_3C_2\cdot 2x\cdot y^2=6xy^2$$

よって，xy^2z^3 の係数は

$$-20\cdot 6=\mathbf{-120}$$

（別解）

$(2x+y-z)^6$ の展開式において，xy^2z^3 の項は

$$\frac{6!}{1!2!3!}\cdot 2x\cdot y^2\cdot(-z)^3=-120xy^2z^3$$ [B]

よって，求める係数は　$\mathbf{-120}$

[B]　$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$

（ただし，$p+q+r=n$）

第 1 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：7

[解説]

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+4)}$$
$$+\frac{1}{(x+4)(x+7)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right) \quad \text{[A]}$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+7)-(x-2)}{(x-2)(x+7)}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{(x-2)(x+7)}}$$

[A]　分数式を複数の分数式の和や差の形で表すことを，「部分分数に分解する」という。

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$
$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{(x+a)(x+b)}$$
$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$$

2

[正解] エオ：21，カ：3，キ：4

[解説]

$$\frac{x^2+2x-12}{x-3}-\frac{x^2+9x+23}{x+4}$$
$$=x+5+\frac{3}{x-3}-\left(x+5+\frac{3}{x+4}\right) \quad \text{[B]}$$
$$=\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+4}$$
$$=3\cdot\frac{(x+4)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}$$
$$=\mathbf{\frac{21}{(x-3)(x+4)}}$$

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ x-3 & x^2+2x-12 \\ & x^2-3x \\ & \quad 5x-12 \\ & \quad 5x-15 \\ & \qquad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ x+4 & x^2+9x+23 \\ & x^2+4x \\ & \quad 5x+23 \\ & \quad 5x+20 \\ & \qquad 3 \end{array}$$

[B]　（分子の次数）≧（分母の次数）である分数式 $\dfrac{A}{B}$ は，A を B で割った商 Q と余り R を用いて
$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$
の形に変形するとよい。

3 **[正解]** ク：8，ケ：1，コ：1，サ：2，シ：2，

ス：3

[解説]

$$-\frac{x+3}{x+1}+\frac{x+4}{x+2}+\frac{x-4}{x-2}-\frac{x-5}{x-3}$$

$$=-\left(1+\frac{2}{x+1}\right)+\left(1+\frac{2}{x+2}\right)$$ [B]

$$+\left(1-\frac{2}{x-2}\right)-\left(1-\frac{2}{x-3}\right)$$

$$=-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x-3}$$

$$=2\cdot\frac{-(x+2)+(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$+2\cdot\frac{-(x-3)+(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{-1}{(x+1)(x+2)}+2\cdot\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{-(x-2)(x-3)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{-(x^2-5x+6)+(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{8x-4}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{8(2x-1)}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}}$$

第 2 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-9，ウ：7，エオ：-1

[解説]

（解法 1）

等式の左辺を展開し，x について整理すると [A]

$$3x^3+(a+18)x^2+(4a+b+36)x$$
$$+4a+2b+c+24$$
$$=3x^3+9x^2+7x+1$$

これが x についての恒等式となるとき

$$a+18=9,$$
$$4a+b+36=7,$$
$$4a+2b+c+24=1$$

これを解いて

$$\boldsymbol{a=-9,\ b=7,\ c=-1}$$

（解法 2）

等式の両辺に $x=-2,\ -1,\ 0$ をそれぞれ代入すると [A]

$$c=-1,$$
$$3+a+b+c=0,$$
$$24+4a+2b+c=1$$

これを解いて　$a=-9$，$b=7$，$c=-1$

このとき，与えられた等式の左辺は

$$3(x+2)^3-9(x+2)^2+7(x+2)-1$$
$$=3(x^3+6x^2+12x+8)-9(x^2+4x+4)$$
$$+7x+14-1$$
$$=3x^3+9x^2+7x+1$$

となり，右辺と一致するから，与えられた等式は x についての恒等式となる。

以上より

$$\boldsymbol{a=-9,\ b=7,\ c=-1}$$

[A]　x についての恒等式の未定係数（未知の係数）の決定には，以下の 2 つの解法がある。
- 係数比較法
  両辺の同じ次数の項の係数が等しいことを利用。
- 数値代入法
  x にどのような値を代入しても成り立つことを利用。

2 **[正解]** カキ：-3

[解説]

$a+b+c=0$ より,

$$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$$

であるから

$$\frac{1-bc}{(a+b)(c+a)}+\frac{1-ca}{(b+c)(a+b)}+\frac{1-ab}{(c+a)(b+c)}$$

$$=\frac{1-bc}{(-c)\cdot(-b)}+\frac{1-ca}{(-a)\cdot(-c)}+\frac{1-ab}{(-b)\cdot(-a)}$$ [B]

$$=\frac{1-bc}{bc}+\frac{1-ca}{ca}+\frac{1-ab}{ab}$$

$$=\frac{1}{bc}-1+\frac{1}{ca}-1+\frac{1}{ab}-1$$

$$=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}-3$$

$$=\frac{a+b+c}{abc}-3$$

$$=-3$$

[B]　条件付きの等式の問題では，条件を用いて，文字を減らすなどの工夫をする。

第 2 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：14，ウエ：14，オ：2，カ：2，キ：2，
ク：0

[解説]

$(x^8+y^8)(x^6+y^6)-(x^7+y^7)^2$

$=x^{14}+x^8y^6+x^6y^8+y^{14}-(x^{14}+2x^7y^7+y^{14})$

$=x^8y^6-2x^7y^7+x^6y^8$

$=x^6y^6(x^2-2xy+y^2)$

$=(x^3)^2(y^3)^2(x-y)^2\geqq 0$ [A]

よって　$(x^8+y^8)(x^6+y^6)\geqq(x^7+y^7)^2$

(等号が成り立つのは，

$x=0$ または $y=0$ または $x=y$

のとき。)

[A]　実数 A について
$A^2\geqq 0$
等号が成り立つのは，$A=0$ のとき。

2 **[正解]** ケ：③，コ：③，サ：②，シ：0

[解説]

$$a^2+b^2+c^2-(-ab-bc-ca)$$
$$=a^2+(b+c)a+b^2+bc+c^2$$
$$=\left(\boldsymbol{a+\frac{b+c}{2}}\right)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+b^2+bc+c^2$$
$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b^2+\frac{2}{3}bc+c^2\right)$$
$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left\{\left(b+\frac{c}{3}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^2+c^2\right\}$$
$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left\{\left(b+\frac{c}{3}\right)^2+\frac{8}{9}c^2\right\}$$
$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\boldsymbol{b+\frac{c}{3}}\right)^2+\frac{2}{3}\boldsymbol{c^2}\geqq 0$$ [B]

よって　$a^2+b^2+c^2\geqq -ab-bc-ca$

(等号が成り立つのは，

$a+\dfrac{b+c}{2}=0$ かつ $b+\dfrac{c}{3}=0$ かつ $c=0$

すなわち $a=b=c=0$ のとき。)

(別解)

$$a^2+b^2+c^2-(-ab-bc-ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\geqq 0$$ [B]

よって　$a^2+b^2+c^2\geqq -ab-bc-ca$

(等号が成り立つのは，

$a+b=0$ かつ $b+c=0$ かつ $c+a=0$

すなわち　$a=b=c=0$ のとき。)

[B]　実数 A，B について
$A^2+B^2\geqq 0$
等号が成り立つのは，$A=B=0$ のとき。

3 **[正解]** ス：④，セ：③，ソ：⑦，タ：0，チ：④，
ツ：⑧，テ：0

[解説]

$|x-y| \leqq |x|+|y|$ を示す。

$$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$$
$$=|x|^2+\mathbf{2|x||y|}+|y|^2-(x^2-\mathbf{2xy}+y^2) \quad \text{[C]}$$
$$=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2-2xy+y^2)$$
$$=2|x||y|+2xy$$
$$=\mathbf{2(|xy|+xy)} \geqq 0 \quad \text{[D]}$$

よって　$|x-y|^2 \leqq (|x|+|y|)^2$

$|x-y| \geqq 0$，$|x|+|y| \geqq 0$ であるから

$$|x-y| \leqq |x|+|y| \quad \text{[E]}$$

次に，$|x|-|y| \leqq |x-y|$ を示す。

(i)　$|x|-|y| \geqq 0$ のとき

$$|x-y|^2-(|x|-|y|)^2$$
$$=(x^2-2xy+y^2)-(|x|^2-\mathbf{2|x||y|}+|y|^2)$$
$$=2|x||y|-2xy$$
$$=\mathbf{2(|xy|-xy)} \geqq 0 \quad \text{[F]}$$

よって　$(|x|-|y|)^2 \leqq |x-y|^2$

$|x|-|y| \geqq 0$，$|x-y| \geqq 0$ であるから

$$|x|-|y| \leqq |x-y|$$

(ii)　$|x|-|y|<0$ のとき

$|x-y| \geqq 0$ であるから　$|x|-|y|<|x-y|$

(i)，(ii)より　$|x|-|y| \leqq |x-y|$

以上から　$|x|-|y| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$

[C]　$|A|^2=A^2$

[D]　$A>0$ のとき　$|A|>-A$
$A \leqq 0$ のとき　$|A|=-A$
よって　$|A| \geqq -A$
すなわち　$|A|+A \geqq 0$

[E]　$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ のとき
$A \geqq B \Longleftrightarrow A^2 \geqq B^2$

[F]　$A \geqq 0$ のとき　$|A|=A$
$A<0$ のとき　$|A|>A$
よって　$|A| \geqq A$
すなわち　$|A|-A \geqq 0$

第2講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：③，ウ：①

[解説]

$a>0$，$b>0$ のとき，$a+b$ と $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ の平方の差をとると [A]

$$(a+b)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2$$

$$=a^2+2ab+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$=\frac{a^2+4ab+b^2}{2}>0 \quad (\because a>0,\ b>0)$$

よって $(a+b)^2>\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)^2$

$a+b>0$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}>0$ であるから

$$a+b>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \cdots\cdots(*)$$

また $a^2>0$，$b^2>0$ より，$a\neq b$ と

(相加平均) ≧ (相乗平均)から

$$\frac{a^2+b^2}{2}>\sqrt{a^2\cdot b^2}=ab \quad (\because ab>0)$$ [B]

$\dfrac{a^2+b^2}{2}>0$，$ab>0$ であるから

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\sqrt{ab} \quad \cdots\cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$より

$$\boldsymbol{\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<a+b}$$

[A] 式の大小比較をする問題では，適当な値を代入し，大小を予測してから証明するとよい（例えば，$a=1$，$b=2$ をそれぞれ代入する）。

[B] 相加平均と相乗平均の大小関係
$a>0$，$b>0$ のとき
$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$
等号が成り立つのは，$a=b$ のとき。

2 **[正解]** エ：4，オカ：-3

[解説]

$$x-10+\frac{9}{x-1}=x-1+\frac{9}{x-1}-9$$

$x>1$ より　$x-1>0$

よって，（相加平均）≧（相乗平均）から

$$x-1+\frac{9}{x-1}-9\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{9}{x-1}}-9$$ [B]

$$=2\cdot 3-9=-3$$ [C]

等号が成り立つのは，$x-1=\dfrac{9}{x-1}$ のときである。

このとき　$(x-1)^2=9$

$x-1>0$ より　$x-1=3$　すなわち　$x=4$

よって，$x=4$ のとき最小値 **-3** をとる。

[C]　相加平均と相乗平均の大小関係から　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$
右辺 $2\sqrt{ab}$ が定数となり，かつ等号が成り立つような a，b の値が存在するなら，$a+b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$ である。

第 3 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：0，イ：3，ウ：5，エ：3

[解説]

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき

$$\begin{aligned}&x^2-4x+7\\=&(2+\sqrt{3}\,i)^2-4(2+\sqrt{3}\,i)+7\\=&4+4\sqrt{3}\,i-3-8-4\sqrt{3}\,i+7\\=&0\end{aligned}$$

$x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56$ を x^2-4x+7 で

割ると

商は　x^3-x^2+x+9，　余りは　$5x-7$ [A]

$$\begin{array}{r|l} & x^3-x^2+x+9 \\ \hline x^2-4x+7 & x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56 \\ & x^5-4x^4+7x^3 \\ \hline & -x^4+5x^3-2x^2 \\ & -x^4+4x^3-7x^2 \\ \hline & x^3+5x^2-24x \\ & x^3-4x^2+7x \\ \hline & 9x^2-31x+56 \\ & 9x^2-36x+63 \\ \hline & 5x-7 \end{array}$$

> [A]　多項式 $P(x)$ を $A(x)$ で割ったとき，商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると
> 　$P(x)=A(x)Q(x)+R(x)$
> （$R(x)$ の次数）$<$（$A(x)$ の次数）
> $A(\alpha)=0$ のとき　$P(\alpha)=R(\alpha)$
> これを利用して，値を求めたい式の次数を下げる。

ゆえに

$$\begin{aligned}&x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56\\=&(x^2-4x+7)(x^3-x^2+x+9)+5x-7\end{aligned}$$ [A]

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，$x^2-4x+7=0$ であるから

$$\begin{aligned}&x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56\\=&5x-7=5(2+\sqrt{3}\,i)-7=\mathbf{3+5\sqrt{3}\,i}\end{aligned}$$

2 **[正解]** オ：4

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2,\ \ \alpha\beta=\frac{1}{2}$$ [B]

であるから

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2\div\frac{1}{2}=4$$

> [B]　解と係数の関係
> 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

3 **[正解]** カ：8，キ：7

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2,\ \ \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

であるから

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=2+2=4$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$$

$$=\frac{1}{2}+2+1=\frac{7}{2}$$

よって，求める 2 次方程式は

$$x^2-4x+\frac{7}{2}=0$$ [C]

すなわち

$$\mathbf{2x^2-8x+7=0}$$

> [C]　$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，α，β は 2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の 2 つの解である。

第3講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-5，ウ：7，エオ：-1，カ：3，キ：2

[解説]

$x=3-2i$ が3次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ の解であるから

$$(3-2i)^3+a(3-2i)^2+b(3-2i)+13=0$$ [A]

整理すると

$$(5a+3b+4)+(-12a-2b-46)i=0$$

a，b は実数であるから，$5a+3b+4$，$-12a-2b-46$ も実数である。

よって　$5a+3b+4=0$，$-12a-2b-46=0$ [B]

これを解いて　$\boldsymbol{a=-5}$，$\boldsymbol{b=7}$

このとき，3次方程式は　$x^3-5x^2+7x+13=0$

左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x^2-6x+13)=0$$

1	−5	7	13	⌊−1
	−1	6	−13	
1	−6	13	0	

よって

$x=-1$，$3\pm 2i$

したがって，他の解は

$\boldsymbol{x=-1,\ 3+2i}$

(別解1)

実数係数の3次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ が虚数 $3-2i$ を解にもつとき，共役な複素数 $3+2i$ もこの方程式の解である。[C]

もう1つの解を α とすると，3次方程式の解と係数の関係より [D]

$(3-2i)+(3+2i)+\alpha=-a$ …… ①

$(3-2i)(3+2i)+(3+2i)\alpha+\alpha(3-2i)=b$ …… ②

$(3-2i)(3+2i)\alpha=-13$ …… ③

[A]　$x=\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の解
$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

[B]　複素数の相等条件
a，b が実数のとき
$a+bi=0$
$\Longleftrightarrow a=0$，$b=0$

[C]　実数係数の n 次方程式が虚数解 $a+bi$ をもつならば，それと共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である。

[D]　3次方程式の解と係数の関係
3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α，β，γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},$$
$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

③より　$13\alpha=-13$

よって　$\alpha=-1$

このとき，①より　$6-1=-a$　ゆえに　$a=-5$

②より　$13-1\cdot 6=b$　ゆえに　$b=7$

以上から　$\boldsymbol{a=-5,\ b=7}$

他の解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 3+2i}$

(別解 2)

実数係数の 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+13=0$ が虚数 $3-2i$ を解にもつとき，共役な複素数 $3+2i$ もこの方程式の解である。

よって，$P(x)=x^3+ax^2+bx+13$ とおくと，$P(x)$ は，$x-(3-2i)$，$x-(3+2i)$ を因数にもつ。 [E]

したがって，$P(x)$ は $\{x-(3-2i)\}\{x-(3+2i)\}$ すなわち $x^2-6x+13$ で割り切れる。

$P(x)$ を $x^2-6x+13$ で割った余りは

$$(6a+b+23)x-13(a+5)$$

$$\begin{array}{r}
x+(a+6) \qquad\qquad\qquad \\
x^2-6x+13\,\overline{\big)\,x^3+ax^2+bx+13} \\
\underline{x^3-6x^2+13x} \\
(a+6)x^2+(b-13)x+13 \\
\underline{(a+6)x^2-6(a+6)x+13(a+6)} \\
(6a+b+23)x-13(a+5)
\end{array}$$

余りは 0 であるから

$$6a+b+23=0,\quad -13(a+5)=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-5,\ b=7}$

このとき

$$P(x)=(x^2-6x+13)\{x+(a+6)\}$$
$$=(x^2-6x+13)(x+1)$$

したがって，他の解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 3+2i}$

[E]　因数定理
$f(x)$ が $x-\alpha$ を因数にもつ
$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

第３講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：④，ウ：②，エ：①，オ：0，

カ：0

[解説]

「$a=0$ かつ $b=0$」$\Longrightarrow$「$a+bz=0$」

は明らかに成り立つ。

「$a+bz=0$」$\Longrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

を示す。

$\boldsymbol{b \neq 0}$　……(＊)　と仮定すると，$a+bz=0$ より [A]

$$z=-\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

a，b が実数，z が虚数であるから，

$z=-\dfrac{a}{b}$ の左辺は**虚数**，右辺は**実数**

となり，矛盾する。

よって，(＊)の仮定は誤りであるから　$b=\boldsymbol{0}$

このとき，$a+bz=0$ より　$a=\boldsymbol{0}$

したがって，「$a+bz=0$」$\Longleftrightarrow$「$a=0$ かつ $b=0$」

である。

[A]　背理法を利用して証明する。
命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を背理法という。

2 **[正解]** キク：-1，ケコ：-2

[解説]

$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

ここで，2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると，ω は虚数解であり [B]

$$\omega^2+\omega+1=0$$

$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)$ より，$\omega^3-1=0$ であるから [C]

$$\omega^3=1$$

このとき

$$P(\omega)=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$$
$$=a\omega+b \cdots\cdots ①$$

また

$$P(\omega)=2\omega^{20}+\omega^{10}=2\omega^{3\cdot6+2}+\omega^{3\cdot3+1}$$
$$=2(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega$$
$$=2\cdot1^6\cdot\omega^2+1^3\cdot\omega$$
$$=2(-\omega-1)+\omega=-\omega-2 \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$a\omega+b=-\omega-2$$ [D]

a，b は実数，ω は虚数であるから

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=-2}$$

このとき，余りは　$-x-2$

[B]　2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると，ω は虚数解であり
$\omega^2+\omega+1=0$
$\omega^3=1$

[C]　3 次式の因数分解
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

[D]　a，b，c，d が実数，z が虚数のとき
$a+bz=c+dz$
$\Longleftrightarrow a=c$，$b=d$
特に
$a+bz=0$
$\Longleftrightarrow a=0$，$b=0$

第 4 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，**イウ**：-4

[解説]

2直線

$$5x-2y-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$x+y-4=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の交点の座標は　(2，2)

2点 (2，2)，(1，-1) を通る直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{2-1}(x-1) \quad \text{[A]}$$

よって　$y=3x-4$

ゆえに　$\boldsymbol{a=3,\ b=-4}$

(別解)

2直線①，②の交点を通る直線は，実数 k を用いて

$$5x-2y-6+k(x+y-4)=0 \quad \cdots\cdots ③ \quad \text{[B]}$$

と表される。

直線③が点 (1，-1) を通るから

$$5+2-6+k(1-1-4)=0$$

$$k=\frac{1}{4}$$

これを③に代入すると

$$5x-2y-6+\frac{1}{4}(x+y-4)=0$$

よって　$y=3x-4$

ゆえに　$\boldsymbol{a=3,\ b=-4}$

[A]　異なる2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式

$x_1 \neq x_2$ のとき

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$x_1=x_2$ のとき

$$x=x_1$$

[B]　2直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点を通る直線の方程式は

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

(k は定数)

2 **[正解]** エオ：-3，カ：2，キ：5

[解説]

2 直線①，②の交点の座標は　$(2,\ 2)$

直線 $3x+2y+3=0$ の傾きは　$-\dfrac{3}{2}$

この直線と平行な直線の傾きも　$-\dfrac{3}{2}$ [C]

よって，求める直線の方程式は

$$y=-\frac{3}{2}(x-2)+2$$ [D]

すなわち　$y=-\dfrac{3}{2}x+5$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-\dfrac{3}{2},\ b=5}$

（別解）

2 直線①，②の交点を通る直線は，実数 k を用いて

$$5x-2y-6+k(x+y-4)=0$$ [B]

と表される。これを x，y について整理すると

$$(k+5)x+(k-2)y-4k-6=0 \quad \cdots\cdots③$$

直線③が直線 $3x+2y+3=0$ と平行であるから

$$(k+5)\cdot 2-(k-2)\cdot 3=0$$ [E]

$$k=16$$

これを③に代入すると

$$21x+14y-64-6=0$$

よって　$y=-\dfrac{3}{2}x+5$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-\dfrac{3}{2},\ b=5}$

> [C]　2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ が
> 平行 $\Longleftrightarrow m_1=m_2$

> [D]　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式
> $y-y_1=m(x-x_1)$
> $\Longleftrightarrow y=m(x-x_1)+y_1$

> [E]　2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ が
> 平行 $\Longleftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$

3 [正解] クケ：-1，コ：2，サ：3

[解説]

2 直線①，②の交点の座標は　(2，2)

直線 $2x-y+1=0$ の傾きは　2

この直線と垂直な直線の傾きは　$-\dfrac{1}{2}$ [F]

よって，求める直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)+2 \quad \text{[D]}$$

すなわち　$y=-\dfrac{1}{2}x+3$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=3}$

（別解）

2 直線①，②の交点を通る直線は，実数 k を用いて

$$5x-2y-6+k(x+y-4)=0 \quad \text{[B]}$$

と表される。これを x，y について整理すると

$$(k+5)x+(k-2)y-4k-6=0 \quad \cdots\cdots③$$

直線③が直線 $2x-y+1=0$ と垂直であるから

$$(k+5)\cdot 2+(k-2)\cdot(-1)=0 \quad \text{[G]}$$

$$k=-12$$

これを③に代入すると

$$-7x-14y+48-6=0$$

よって　$y=-\dfrac{1}{2}x+3$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=3}$

> [F]　2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ が
> 垂直 $\Longleftrightarrow m_1m_2=-1$

> [G]　2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ が
> 垂直 $\Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

第4講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：1，ウ：5，エ：4，オ：4

[解説]

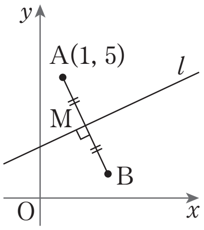
(1)　点Bの座標を $(a,\ b)$ とする。

$AB\perp l$ より [A]

$$\frac{b-5}{a-1}\cdot\frac{1}{2}=-1 \quad \text{[B]}$$

よって

$$b=-2a+7 \quad \cdots\cdots①$$



線分ABの中点 $M\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+5}{2}\right)$ が直線 l 上にあることから [C]

$$\frac{b+5}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}+2$$

よって　$2b=a-1$　……②

①，②より　$a=3,\ b=1$

ゆえに　**B(3, 1)**

[A]
直線 l に関して2点A，Bが対称
$\Longleftrightarrow$
$AB\perp l$ かつ 線分ABの中点が直線 l 上

[B]　2直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ が
垂直 $\Longleftrightarrow m_1m_2=-1$

[C]　2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分ABの中点の座標は
$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

(2) (i) AP が最小となるのは，AP $\perp l$ となるときである。

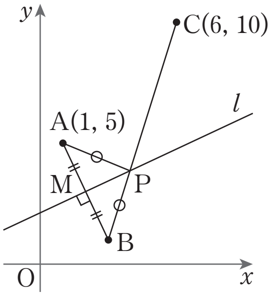
このとき，点 P は(1)の M と一致する。

M の座標は

$$\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) \text{ すなわち } (2,\ 3)$$

よって，求める AP の最小値は

$$\mathrm{AM}=\sqrt{(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$$



(ii) 右図のように，2 点 A，C は直線 l に関して同じ側にあり，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}=\mathrm{BP}+\mathrm{PC}\geqq \mathrm{BC}$$

であるから，3 点 B，P，C が一直線上にあるとき，AP+PC は最小となる。 [D]

このとき，点 P は直線 BC と直線 l の交点である。

直線 BC の方程式は

$$y-1=\frac{10-1}{6-3}(x-3)$$

ゆえに　$y=3x-8$

これと直線 l の方程式を連立して解くと

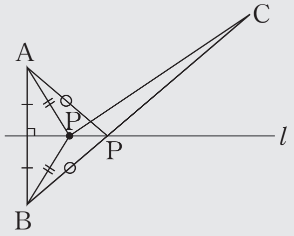
$$x=4,\ y=4$$

よって　**P(4, 4)**

[D]　次図のように，2 点 A，B が直線 l に関して対称であり，2 点 A，C が l に関して同じ側にあるとき，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}=\mathrm{BP}+\mathrm{PC}\geqq \mathrm{BC}$$

より，AP+PC が最小になるのは，3 点 B，P，C が一直線上にあるときである。



第 4 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：1，ウエ：-3，オ：5，

カキ：-1，クケ：-1

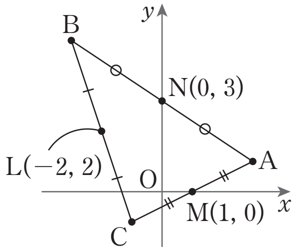
[解説]

$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ とする。

△ABC の各辺の中点が

L，M，N という条件

から，x 座標について



$$\frac{x_1+x_2}{2}=0,\quad \text{[A]}$$

$$\frac{x_2+x_3}{2}=-2,$$

$$\frac{x_3+x_1}{2}=1$$

ゆえに

$$x_1+x_2=0,\ x_2+x_3=-4,\ x_3+x_1=2$$

よって　$x_1=3$，$x_2=-3$，$x_3=-1$

同様に，y 座標について

$$\frac{y_1+y_2}{2}=3,\quad \frac{y_2+y_3}{2}=2,\quad \frac{y_3+y_1}{2}=0$$

ゆえに

$$y_1+y_2=6,\ y_2+y_3=4,\ y_3+y_1=0$$

よって　$y_1=1$，$y_2=5$，$y_3=-1$

したがって

A(3, 1)，B(−3, 5)，C(−1, −1)

[A]　2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

2

[正解] コサ：14，シ：5，スセ：14

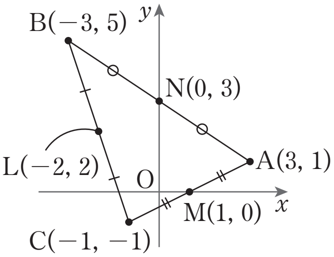
[解説]

A(3, 1)，C(−1, −1) より，直線 AC の方程式は

$$y-1=\frac{1-(-1)}{3-(-1)}(x-3)$$

ゆえに　$x-2y-1=0$

点 B から直線 AC に下ろした垂線の長さ d は，B(−3, 5) と AC の距離であるから



$$d=\frac{|-3-2\cdot5-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$ [B]

$$=\frac{\mathbf{14}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

また　$AC=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{1-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$

よって

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot d=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{14}{\sqrt{5}}=\mathbf{14}$$

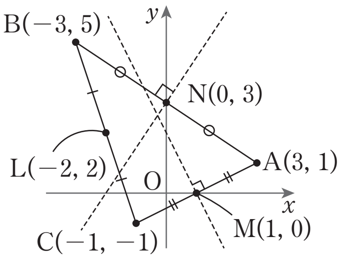
[B]　点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3　**[正解]** ソタ：-2，チ：7，ツテ：18，ト：7

[解説]

求める外心は，線分AC，ABそれぞれの垂直二等分線の交点である。[C]



線分ACの垂直二等分線は，線分ACの中点Mを通り，線分ACに垂直な直線である。

直線ACの方程式は $x-2y-1=0$ で，傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，線分ACの垂直二等分線の方程式は

$$y=-2(x-1)$$ [D]

すなわち　$y=-2x+2$ …… ①

また，線分ABの垂直二等分線は，線分ABの中点Nを通り，線分ABに垂直な直線である。

A(3, 1)，B(−3, 5) より，直線ABの傾きは

$\dfrac{1-5}{3-(-3)}=-\dfrac{2}{3}$ であるから，線分ABの垂直二等分線の方程式は

$$y=\frac{3}{2}x+3 \text{ …… ②}$$ [D]

①，②より　$x=-\dfrac{2}{7}$，$y=\dfrac{18}{7}$

よって，△ABCの外心の座標は

$$\left(-\frac{2}{7},\ \frac{18}{7}\right)$$

[C]　三角形の外心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点。

[D]　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m である直線の方程式

$y-y_1=m(x-x_1)$

$\Longleftrightarrow y=m(x-x_1)+y_1$

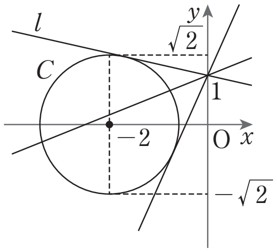
第 5 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：⑤

[解説]

$C:(x+2)^2+y^2=2$

$l: y=mx+1$



(解法 1)

$y=mx+1$ を

$(x+2)^2+y^2=2$ に

代入すると

$$(x+2)^2+(mx+1)^2=2$$

$$(m^2+1)x^2+2(m+2)x+3=0$$

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2+1)\cdot 3$$

$$=-2m^2+4m+1$$

l と C が共有点をもつのは，$D\geqq 0$ のときであるから

$$-2m^2+4m+1\geqq 0 \quad \text{[A]}$$

$$2m^2-4m-1\leqq 0$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\leqq m\leqq \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}}$

(解法 2)

円 C の中心 $(-2,\ 0)$ と $l: mx-y+1=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|m\cdot(-2)-0+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \text{[B]}$$

l と C が共有点をもつのは，$d\leqq$ (円 C の半径)のときであるから

$$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}\leqq\sqrt{2}$$

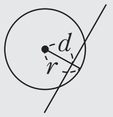
[A]　円と直線の位置関係

円と直線の方程式から 1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とし，円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

[1]　異なる 2 点で交わる

$\iff D>0$

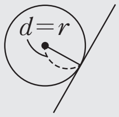
$\iff d<r$



[2]　接する

$\iff D=0$

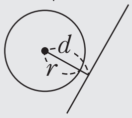
$\iff d=r$



[3]　共有点をもたない

$\iff D<0$

$\iff d>r$



[B]　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\sqrt{m^2+1}>0$ より　$|-2m+1|\leqq\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

両辺は負でないから２乗すると

$$(-2m+1)^2\leqq 2(m^2+1)$$

$$2m^2-4m-1\leqq 0$$

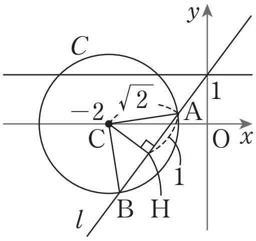
よって　$\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\leqq m\leqq\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}}$

2 **[正解]** イ：0，ウ：4，エ：3

[解説]

円 C の中心を C とし，C から直線 l に下ろした垂線を CH とする。

CH の長さは，点 C と直線 l：$mx-y+1=0$ の距離と等しいから

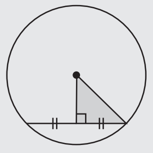


$$\mathrm{CH}=\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$ [B]

また，直線 l と円 C の２つの交点をそれぞれ A，B とすると，AB＝2 であるから

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=1$$ [C]

[C]　円の中心から弦に下ろした垂線は，その弦を二等分する。



△ACH において，三平方の定理より

$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AH}^2$$

$$\left(\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=(\sqrt{2})^2-1^2$$

$$(-2m+1)^2=m^2+1$$

$$3m^2-4m=0$$

$$m(3m-4)=0$$

よって　$\boldsymbol{m=0,\ \dfrac{4}{3}}$

第 5 講　PART2　確認問題 解答

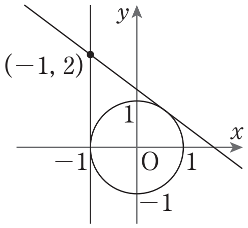
1 **[正解]** アイ：-1，ウ：3，エ：4，オ：5

[解説]

図より，求める接線の 1 つは，直線 $x=-1$ である。

x 軸に垂直でないもう 1 本の接線の方程式を

$$y=m(x+1)+2$$



すなわち

$$mx-y+m+2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

とおく。直線①が円に接する条件は，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線①の距離が円の半径 1 に等しいことである。

よって

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \quad \text{[A]}$$

$$|m+2|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+2)^2=m^2+1$$

$$4m=-3$$

ゆえに　$m=-\dfrac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると

$$3x+4y-5=0$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{x=-1,\ 3x+4y-5=0}$$

（別解）

求める接線と円の接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，点 P における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=1 \cdots\cdots ① \quad \text{[B]}$$

> [A]　点と直線の距離
> 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
> $$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

> [B]　円の接線の方程式
> 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
> $$x_1x+y_1y=r^2$$

これが点 $(-1,\ 2)$ を通るから

$$-x_1+2y_1=1$$

すなわち　$x_1=2y_1-1$　……②

また，点 P は円上の点であるから

$$x_1{}^2+y_1{}^2=1 \quad ……③$$

②を③に代入すると

$$(2y_1-1)^2+y_1{}^2=1$$

$$5y_1{}^2-4y_1=0$$

$$y_1(5y_1-4)=0$$

ゆえに　$y_1=0,\ \dfrac{4}{5}$

②より，$y_1=0$ のとき　$x_1=-1$

$y_1=\dfrac{4}{5}$ のとき　$x_1=\dfrac{3}{5}$

よって，①から，求める接線の方程式は

$$-x+0=1,\ \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1$$

すなわち

$$\boldsymbol{x=-1,\ 3x+4y-5=0}$$

2　**[正解]** カキ：-3，ク：1，ケ：3，コ：2，サ：5，

シ：2

[解説]

$x^2+(y-2)^2=4$ …… ①

$6x+2y+1=0$ …… ②

とする。

題意より，円①と直線②の 2 つの共有点を，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 3 の円が通る。

①，②の共有点を通る図形の方程式は，実数 k を用いて

$x^2+(y-2)^2-4+k(6x+2y+1)=0$ [C]

と表され，変形すると

$x^2+6kx+y^2+(2k-4)y+k=0$

$(x+3k)^2+\{y+(k-2)\}^2=10k^2-5k+4$

…… ③

> [C]　$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ を x，y を含む式とすると，2 つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る図形の方程式は
>
> $f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$
>
> （k は定数）

③ が半径 3 の円を表すのは

$10k^2-5k+4=9$

のときであるから

$10k^2-5k-5=0$

$2k^2-k-1=0$

$(k-1)(2k+1)=0$

よって　$k=1,\ -\dfrac{1}{2}$

円 ③ の中心の座標は　$(-3k,\ -k+2)$

ゆえに，円 ③ の中心は

$k=1$ のとき　$(-3,\ 1)$

$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

よって　$(a,\ b)=\mathbf{(-3,\ 1)},\ \left(\mathbf{\dfrac{3}{2}},\ \mathbf{\dfrac{5}{2}}\right)$

第５講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：7，ウエ：29，オ：4

[解説]

円 C_1 の中心は $(3,\ 4)$，半径は 2

円 C_2 の中心は $(0,\ 0)$，半径は r

円 C_1 と C_2 の中心間の距離は　$\sqrt{3^2+4^2}=5$

(1)　円 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるのは

$$|r-2|<5<r+2$$ [A]

$|r-2|<5$ より

$$-5<r-2<5$$

$$-3<r<7$$

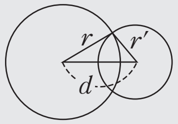
$5<r+2$ より

$$3<r$$

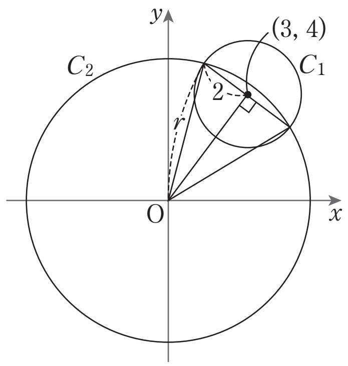
よって

$$\boldsymbol{3<r<7}$$

[A]　半径がそれぞれ r，r' である 2 つの円の中心間の距離を d とすると，
2 つの円が異なる 2 点で交わる
$\Longleftrightarrow |r-r'|<d<r+r'$



(2)　円 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，2 つの円の共通弦の長さが最大になるのは，右図より，共通弦が



円 C_1 の中心を通るとき，すなわち共通弦が円 C_1 の直径となるときである。

したがって，共通弦の長さの最大値は　4

このときの半径 r は，三平方の定理より

$$r^2=5^2+2^2=29$$

$r>0$ より

$$\boldsymbol{r=\sqrt{29}}$$

（r を求める別解）

円 C_1 と C_2 の異なる 2 交点を通る直線の方程式は

$$(x-3)^2+(y-4)^2-4+k\left(x^2+y^2-r^2\right)=0$$ [B]

において，$k=-1$ のときであるから

$$(x-3)^2+(y-4)^2-4-\left(x^2+y^2-r^2\right)=0$$

$$-6x-8y+r^2+21=0 \quad \cdots\cdots①$$

①が円 C_1 の中心 $(3,\ 4)$ を通るとき，2 つの円の共通弦の長さが最大となる。

よって　$-18-32+r^2+21=0$

$$r^2-29=0$$

$r>0$ より　$\boldsymbol{r=\sqrt{29}}$

[B]　$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ を x，y を含む式とすると，2 つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る図形の方程式は

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$$

（k は定数）

第 6 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：0，イ：9，ウ：2，エ：5，オ：2，カ：4

[解説]

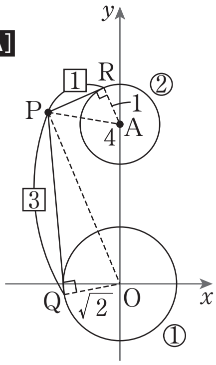
円 $x^2+y^2=2$ …… ①の中心を O とすると

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ 半径は\ \sqrt{2}$$

円 $x^2+(y-4)^2=1$ …… ②の中心を A とすると

$$\mathrm{A}(0,\ 4),\ 半径は\ 1$$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。 **[A]**



点 P から円①に引いた接線の接点を Q とすると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2-\mathrm{OQ}^2$$
$$=x^2+y^2-2$$

点 P から円②に引いた接線の接点を R とすると

$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{AP}^2-\mathrm{AR}^2$$
$$=x^2+(y-4)^2-1$$

条件より　$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=3:1$

$$3\mathrm{PR}=\mathrm{PQ}$$

両辺を 2 乗すると　$9\mathrm{PR}^2=\mathrm{PQ}^2$

よって

$$9\{x^2+(y-4)^2-1\}=x^2+y^2-2$$

整理すると

$$x^2+y^2-9y+\frac{137}{8}=0$$

すなわち

$$x^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{25}{8}$$

よって，求める軌跡は

中心が $\left(0,\ \frac{9}{2}\right)$，半径が $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ の円

> [A]　軌跡の求め方
> 求める軌跡上の点の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を $x,\ y$ の関係式で表す。

2 **[正解]** キ：2，ク：7，ケコ：11，サ：⑥

[解説]

$$y=-x^2-(2a-6)x+a^2+a-1$$
$$=-\{x+(a-3)\}^2+2a^2-5a+8$$

よって，頂点 P の座標は

$$\left(-a+3,\ 2a^2-5a+8\right)$$

頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-a+3\ \cdots\cdots\ (*)$$
$$y=2a^2-5a+8\ \cdots\cdots\ (**)$$

$(*)$より　$a=-x+3$

これを$(**)$に代入して

$$y=2(-x+3)^2-5(-x+3)+8$$
$$=2x^2-7x+11$$

また，$-1<a\leqq 1$ より　$-1<-x+3\leqq 1$ [B]

$$2\leqq x<4$$

よって，求める軌跡は

放物線 $y=2x^2-7x+11$ の $2\leqq x<4$ の部分

[B]　媒介変数 a のとり得る値の範囲に注意。

第 6 講　PART2　確認問題 解答

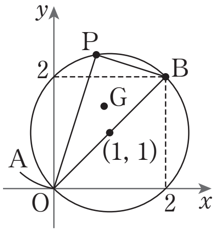
1

[正解] ア：1，イ：1，ウ：2，エ：3，オ：⑥

[解説]

P$(s,\ t)$ とすると，点 P は円 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 上を動くから **[A]**

$$s^2+t^2-2s-2t=0 \quad \cdots\cdots (*)$$



[A]　曲線上の点を $(s,\ t)$，軌跡を求める点を $(x,\ y)$ とする。

また，G$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{0+2+s}{3},\ y=\frac{0+2+t}{3} \quad \cdots\cdots (**) \quad \text{[B]}$$

[B]　3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

すなわち

$$s=3x-2,\ t=3y-2 \quad \cdots\cdots (***)$$

$(***)$を$(*)$に代入して

$$(3x-2)^2+(3y-2)^2$$
$$-2(3x-2)-2(3y-2)=0$$

整理すると

$$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{2}{9}$$

ここで，点 P が $(0,\ 0)$，$(2,\ 2)$ のとき，点 P はそれぞれ点 A，B と一致し，三角形ができないから，不適。よって　$(s,\ t)\neq(0,\ 0),\ (2,\ 2)$

このとき，$(**)$より　$(x,\ y)\neq\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

したがって，求める軌跡は

中心が $(1,\ 1)$，半径が $\frac{\sqrt{2}}{3}$ の円

ただし，2 点 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ を除く。

第 6 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：④，イ：②，ウ：③

[解説]

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ と $y=mx-1$ より

$$\frac{1}{2}x^2=mx-1$$

$$x^2-2mx+2=0 \cdots\cdots (*)$$

2 次方程式$(*)$の判別式を D とすると，C と l が異なる 2 点で交わるのは，$D>0$ のときである。

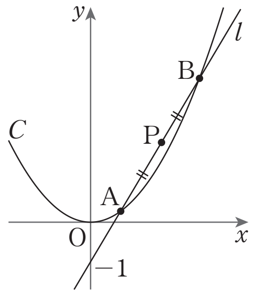
$$\frac{D}{4}=m^2-2$$

より　$m^2-2>0$

よって

$$\boldsymbol{m<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<m}$$

(2)　(1)のとき，2 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，α，β は 2 次方程式$(*)$の異なる 2 つの実数解である。 [A]



よって，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2m$ [B]

P$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2m}{2}=m \cdots\cdots (**)$$ [C]

また，点 P は直線 l 上の点であるから

$$y=mx-1 \cdots\cdots (***)$$

$(**)$を$(***)$に代入して

$$y=x\cdot x-1=x^2-1$$

[A]　放物線と直線の 2 交点や，円と直線の 2 交点について考えるときは，2 交点の x 座標を α，β とおいて，解と係数の関係の利用を検討するとよい。

[B]　解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

[C]　2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ここで，(1)より，$m<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<m$ である

から，(＊＊)より

$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$

したがって，求める軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=x^2-1}$ の

$\boldsymbol{x<-\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{\sqrt{2}<x}$ の部分

第７講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑤，イ：②，ウ：①

[解説]

不等式 $(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$，

$|x|+|y|>2$ の表す領域を，それぞれ P，Q とする。

領域 P について

$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ より [A]

「$x+2y-4>0$ かつ $x^2+y^2-2x-8<0$」……(＊)

または

「$x+2y-4<0$ かつ $x^2+y^2-2x-8>0$」

……(＊＊)

[A]　$AB>0$

$\iff \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

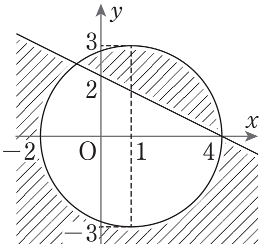
$AB<0$

$\iff \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$

(＊)より　「$y>-\dfrac{1}{2}x+2$ かつ $(x-1)^2+y^2<9$」

(＊＊)より　「$y<-\dfrac{1}{2}x+2$ かつ $(x-1)^2+y^2>9$」

よって，領域 P は右図斜線部分。ただし，境界線を含まない。



領域 Q について

$|x|+|y|>2$ より

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　$x+y>2$

すなわち　$y>-x+2$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき　$x-y>2$

すなわち　$y<x-2$

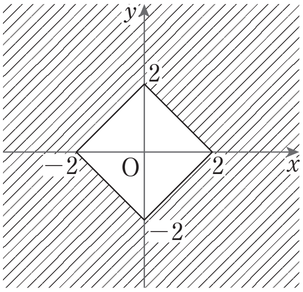
$x<0$，$y\geqq 0$ のとき　$-x+y>2$

すなわち　$y>x+2$

$x<0$，$y<0$ のとき　$-x-y>2$

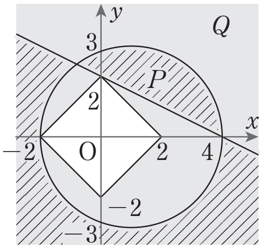
すなわち　$y<-x-2$

よって，領域 Q は右図斜線部分。ただし，境界線を含まない。



したがって，$P \subset Q$ が成り立つ。［B］

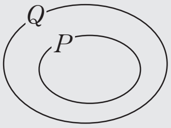
よって，$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$ ならば $|x|+|y|>2$ である。



［B］　条件 p が表す領域を P，条件 q が表す領域を Q とすると，

命題 $p \Longrightarrow q$ が真

$\Longleftrightarrow P \subset Q$



第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イウ：-4，エオ：10，カ：2，
キ：5，ク：0，ケ：2，コ：5

[解説]

円 $x^2+y^2=20$ ……① と直線 $y=x-2\sqrt{5}$ ……②
の共有点の x 座標を求めると

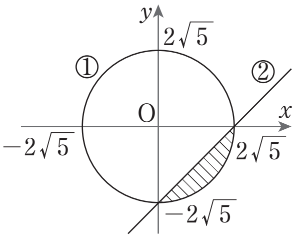
$$x^2+(x-2\sqrt{5})^2=20$$
$$2x^2-4\sqrt{5}x=0$$
$$2x(x-2\sqrt{5})=0$$

ゆえに　$x=0,\ 2\sqrt{5}$

よって，円①と直線②の共有点の座標は

$$(0,\ -2\sqrt{5}),\ (2\sqrt{5},\ 0)$$

したがって，連立不等式 $x^2+y^2\leqq 20$，$y\leqq x-2\sqrt{5}$
の表す領域 D は，右図斜線部分。ただし，境界線を含む。



$$x-2y=k \text{ ……③}$$

とおくと，[A]

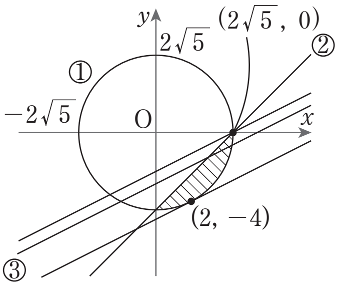
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}k$$

より，③は傾き $\frac{1}{2}$，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ の直線を表す。

この直線③が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

[A]　領域と最大・最小
与えられた連立不等式が表す領域 D を図示する。最大値や最小値を求める式を $f(x,\ y)=k$ とおいて，$f(x,\ y)=k$ が表す図形を動かし，この図形が領域 D と共有点をもつような範囲を調べる。この範囲における k の値の最大値や最小値を求める。

k が最大となるのは，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ が最小となるとき，すなわち，直線③と円①が第４象限で接するときである。



直線③と円①の中心 $(0,\ 0)$ の距離が半径 $2\sqrt{5}$ と等しくなるときを考えて

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$ [B]

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$$|k|=10$$

よって　$k=\pm10$

図より，第４象限で接するとき，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ は負であるから，$k>0$ より　$k=10$

このとき，直線③と円①の接点は，直線③と，$(0,\ 0)$を通り直線③と垂直な直線 $y=-2x$ の交点であるから

$$\frac{1}{2}x-\frac{10}{2}=-2x \qquad x=2$$

よって，接点の座標は　$(2,\ -4)$

これは領域 D に含まれる。

次に，k が最小となるのは，y 切片 $-\frac{1}{2}k$ が最大となるとき，すなわち，直線③が点 $(2\sqrt{5},\ 0)$ を通るときである。

このとき　$k=2\sqrt{5}-2\cdot0=2\sqrt{5}$

以上から，

$x=2$，$y=-4$ のとき　最大値 10

$x=2\sqrt{5}$，$y=0$ のとき　最小値 $2\sqrt{5}$

[B]　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

第 7 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$f(x,\ y)=a(x+3)-y$ とする。

線分 AB が直線 $y=a(x+3)$ と共有点をもたないのは，2 点 A，B がともに $f(x,\ y)>0$ の領域にあるとき，または，ともに $f(x,\ y)<0$ の領域にあるときである。 [A] [B]

よって

$$f(-2,\ 3)>0 \text{ かつ } f(3,\ -1)>0$$

または

$$f(-2,\ 3)<0 \text{ かつ } f(3,\ -1)<0$$

したがって　$f(-2,\ 3)\times f(3,\ -1)>0$ [C]

ゆえに　$\{a(-2+3)-3\}\{a(3+3)-(-1)\}>0$

$$(a-3)(6a+1)>0$$

よって，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a<-\frac{1}{6},\ 3<a}$$

(別解)

$y=a(x+3)$ は，傾きが a で点 $(-3,\ 0)$ を通る直線を表す。

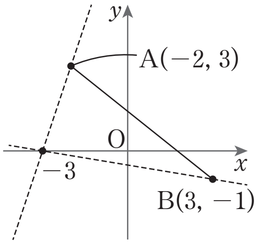
この直線が

点 A$(-2,\ 3)$ を通るとき　$a=3$

点 B$(3,\ -1)$ を通るとき　$a=-\dfrac{1}{6}$

よって，右図から，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a<-\frac{1}{6},\ 3<a}$$



[A]　正領域・負領域
曲線 $f(x,\ y)=0$ に対し，
$f(x,\ y)>0$ の表す領域を「正領域」，
$f(x,\ y)<0$ の表す領域を「負領域」
という。

[B]　直線 $f(x,\ y)=0$ と線分 AB が共有点をもたない
$\Longleftrightarrow$ 2 点 A，B がともに正領域 $f(x,\ y)>0$ にあるか，または
ともに負領域 $f(x,\ y)<0$ にある

[C]　$AB>0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$$

$AB<0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$$

2 **[正解]** イウ：11，エ：8

[解説]

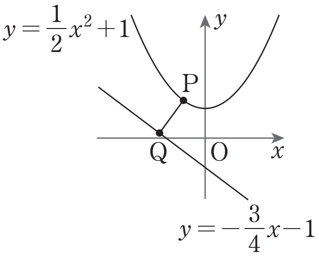
点 P の座標は，実数 t を用いて，$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2+1\right)$ と表される。

求める線分 PQ の長さの最小値は，点 P と直線 $y=-\frac{3}{4}x-1$ すなわち $3x+4y+4=0$ の距離 d の最小値である。

$$d=\frac{\left|3t+4\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)+4\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|2t^2+3t+8|}{5}\ \text{[D]}$$

ここで右図より，

点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2+1\right)$ は領域 $y>-\frac{3}{4}x-1$ すなわち $3x+4y+4>0$ にある。



したがって

$3t+4\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)+4>0$ すなわち

$$2t^2+3t+8>0$$

このとき

$$d=\frac{2t^2+3t+8}{5}=\frac{2}{5}\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{8}\ \text{[D]}$$

よって，求める最小値は $\boldsymbol{\frac{11}{8}}$

> [D]　点と直線の距離
> 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
> $$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
> 点 $(x_1,\ y_1)$ が領域 $ax_1+by_1+c>0$ にあるとき
> $$|ax_1+by_1+c|=ax_1+by_1+c$$
> 点 $(x_1,\ y_1)$ が領域 $ax_1+by_1+c<0$ にあるとき
> $$|ax_1+by_1+c|=-(ax_1+by_1+c)$$

第 8 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑨，イ：④

[解説]

$$y=2\sin\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$ [A]

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを

（Ⅰ）y 軸方向に 2 倍に拡大

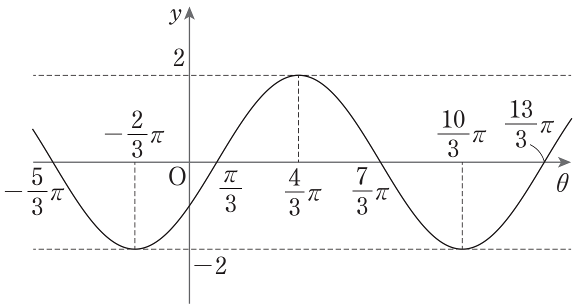
（Ⅱ）θ 軸方向に 2 倍に拡大

（Ⅲ）θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動

したものであり，周期は

$$2\pi\div\frac{1}{2}=4\pi$$ [B]

グラフは次図のようになる。



[A]　グラフの平行移動と拡大・縮小
関数 $y=\sin\theta$ のグラフに対し，
$y=a\sin\theta$ のグラフ $(a>0)$
→ y 軸方向に a 倍に拡大・縮小

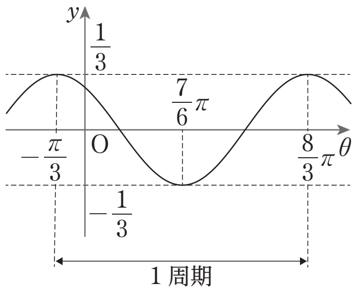
$y=\sin k\theta$ のグラフ $(k>0)$
→ θ 軸方向に $\frac{1}{k}$ 倍に拡大・縮小

$y=\sin(\theta-p)$ のグラフ
→ θ 軸方向に p だけ平行移動

[B]　三角関数の周期
$y=\sin k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{|k|}$
$y=\cos k\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{|k|}$
$y=\tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{|k|}$

2 **[正解]** ウ：②

[解説]



求める関数を

$$y=a\cos k(\theta-p)\quad (a>0,\ k>0)$$ [A]

とする。グラフより，この関数の

最大値は $\dfrac{1}{3}$　　最小値は $-\dfrac{1}{3}$

であるから　$a=\dfrac{1}{3}$

また，この関数の周期は

$$\frac{8}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=3\pi$$

であるから　$\dfrac{2\pi}{|k|}=3\pi$　　よって　$|k|=\dfrac{2}{3}$ [B]

$k>0$ より　$k=\dfrac{2}{3}$

さらに，与えられたグラフは $y=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2}{3}\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものであるから

$$y=\frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}\left\{\theta-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

ここで，関数②について

$$y=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\theta+\frac{2}{9}\pi\right)=\frac{1}{3}\cos\frac{2}{3}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，グラフに適する関数は　②

3 [正解] エ：7

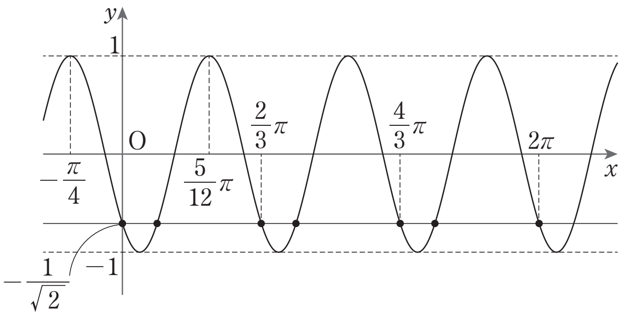
[解説]

$$f(x)=\cos\left(3x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

とすると

$$f(x)=\cos 3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

より，$y=f(x)$ のグラフは次図のようになる。



$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ の共有点のうち，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にあるものの個数が求める解の個数である。 [C]

よって　7 個

[C]　t を定数とするとき，θ の方程式 $\cos\theta=t$ の解の個数は，$y=\cos\theta$ のグラフと直線 $y=t$ の共有点の個数と等しい。

第 8 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イウ：12，エオ：13，カキ：12

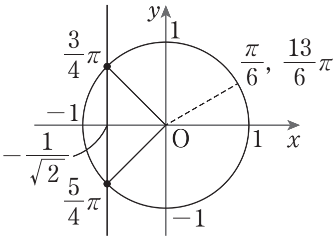
[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ [A]

$\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

ゆえに　$\theta = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}\pi},\ \boldsymbol{\dfrac{13}{12}\pi}$



[A]
$\sin(a\theta + b) = p$ や $\cos(a\theta + b) < q$
などの形をした方程式，不等式は，
まず( )の中の $a\theta + b$ のとりうる値の範囲を求める。
その範囲において，$\sin(a\theta + b) = p$ や $\cos(a\theta + b) < q$ を満たす $a\theta + b$ の値や範囲を求める。

2 **[正解]** ク：①，ケ：③，コ：⑤，サ：⑦，シ：⑨，
ス：⑩

[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{17}{4}\pi$ [A]

$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) > \dfrac{1}{2}$ であるから

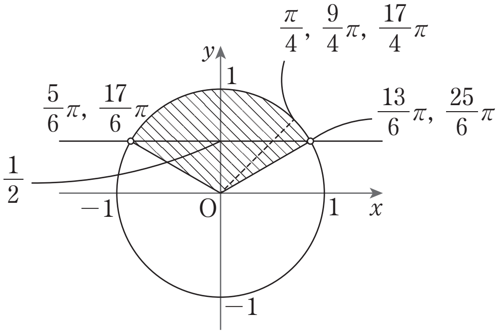
$$\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{17}{6}\pi,$$

$$\frac{25}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{17}{4}\pi$$

ゆえに

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{7}{24}\pi,\ \frac{23}{24}\pi < \theta < \frac{31}{24}\pi,}$$

$$\boldsymbol{\frac{47}{24}\pi < \theta < 2\pi}$$



3 **[正解]** セ：①，ソ：④，タ：⑤，チ：⑧，ツ：⑨，
テ：⑩

[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ [A]

$\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

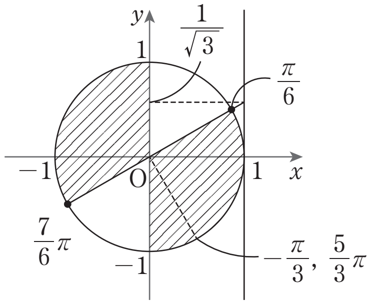
$$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{7}{6}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

ゆえに

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi < \theta \leqq \frac{3}{2}\pi,}$$

$$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi}$$



4 [正解] ト：0，ナ：3，ニ：5，ヌ：3

[解説]

$$2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$$

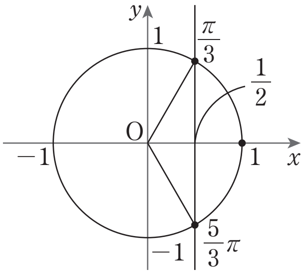
$$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0$$ [B]

$$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$$

$$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$$

よって　$\cos\theta=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$



[B]　複数の種類の三角関数で表された方程式や不等式は，1種類の三角関数で表すとよい。

5 [正解] ネ：①，ノ：②，ハ：⑤，ヒ：⑥

[解説]

$$2\cos^2\theta+\sin\theta-2>0$$

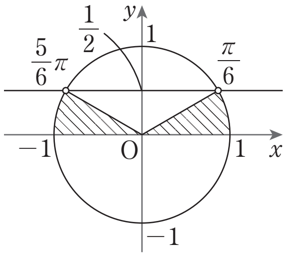
$$2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2>0$$ [B]

$$2\sin^2\theta-\sin\theta<0$$

$$\sin\theta(2\sin\theta-1)<0$$

よって　$0<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\boldsymbol{0<\theta<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<\theta<\pi}$



第 8 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤

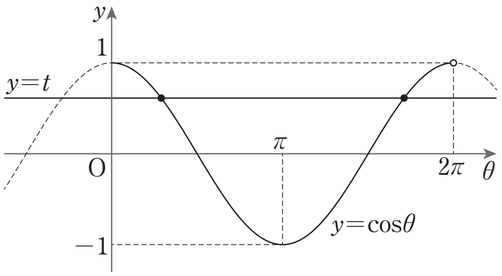
[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式 $\cos\theta = t$ を満たす θ が存在するのは，$y = \cos\theta$ のグラフと直線 $y = t$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ において共有点をもつときである。[A]

[A]　ある区間において θ の方程式 $\cos\theta = t$ を満たす θ が存在するのは，$y = \cos\theta$ のグラフと直線 $y = t$ がその区間において共有点をもつときである。

ゆえに，次図より求める t の値の範囲は

$$\mathbf{-1 \leqq t \leqq 1}$$



2

[正解] イ：③

[解説]

$$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = a$$

$$2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 1 = a$$

$$-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1 = a \quad \cdots\cdots(*)$$

$\cos\theta = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，$(*)$は

$$-2t^2 + t + 1 = a$$ [B]

と表される。

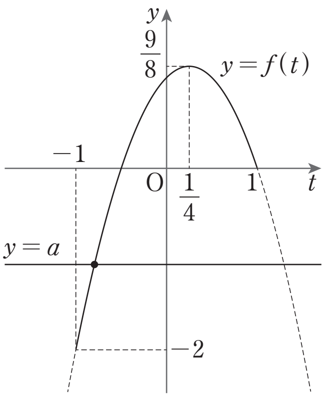
[B]　グラフをかいて共有点が存在するような範囲を求める。ただし，$\cos\theta = t$ より，t の値の範囲においてグラフを考えることに注意する。

この式の左辺を $f(t)$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式$(*)$を満たすθ が存在するのは，t の方程式 $f(t) = a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲に解をもつとき，すなわち，$y = f(t)$ のグラフと直線 $y = a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ において共有点をもつときである。

$$f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

ゆえに，次図より求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq a \leqq \frac{9}{8}}$$



第 9 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：0，イ：2，ウ：3

[解説]

$$\sin x-\sin\frac{x}{2}=0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0$$ [A]

$$\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$$

よって　$\sin\frac{x}{2}=0$，$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より，$0\leqq\frac{x}{2}<\pi$ であるから

$\sin\frac{x}{2}=0$ より　$\frac{x}{2}=0$　よって　$x=0$

$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ より　$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$　よって　$x=\frac{2}{3}\pi$

したがって　$\boldsymbol{x=0,\ \frac{2}{3}\pi}$

[A]　2 倍角の公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=1-2\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

を用いて，三角関数の種類や角を揃える。

2 **[正解]** エ：⑤，オ：⑧

[解説]

$$\cos 2x - \sqrt{2}\cos x - 1 \geqq 0$$

$$(2\cos^2 x - 1) - \sqrt{2}\cos x - 1 \geqq 0$$ [A]

$$2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 2 \geqq 0$$

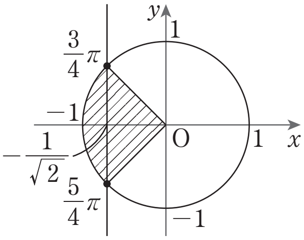
$$(\cos x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) \geqq 0$$

$\cos x - \sqrt{2} < 0$ より　$2\cos x + \sqrt{2} \leqq 0$

よって　$\cos x \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より

$$\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi}$$



第 9 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：⑤，ウ：⑧，エ：④，オ：②，
カ：③，キ：①，ク：③，ケ：⑤

[解説]

(1)　$\tan\theta = \tan 2\cdot\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$ [A]

(2)　$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$ より [B]

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$$

よって

$$\cos\theta = \cos 2\cdot\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1 \quad \text{[A]}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{1+t^2}-1 = \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(3)　(1)，(2)より

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta \quad \text{[B]}$$

$$= \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

[A]　2 倍角の公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 1-2\sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

[B]　三角関数の相互関係

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

第９講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：②，ウ：③，エ：④，オ：⑥，
カ：⑤，キ：⑤，ク：⑦，ケ：③

[解説]

(1)　$\theta=\frac{2}{5}\pi$ より　$5\theta=2\pi$

ゆえに　$3\theta=2\pi-2\theta$

よって　$\sin 3\theta=\sin(2\pi-2\theta)=\boldsymbol{-\sin 2\theta}$ [A]

したがって　$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$

(2)　$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)$

$=\boldsymbol{\sin 2\theta}\cos\theta+\boldsymbol{\cos 2\theta}\sin\theta$ [B]

$=2\sin\theta\boldsymbol{\cos^2\theta}+(1-2\boldsymbol{\sin^2\theta})\sin\theta$ [C]

$=2\sin\theta(1-\boldsymbol{\sin^2\theta})+\sin\theta-2\boldsymbol{\sin^3\theta}$ [D]

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(3)　(2)の等式と，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を [C]
(1)の等式に代入すると

$3\sin\theta-4\sin^3\theta+2\sin\theta\cos\theta=0$ ……(＊)

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ のとき，$\sin\theta=\sin\frac{2}{5}\pi\neq 0$ であるから(＊)の両辺を $\sin\theta$ で割ると

$3-4\sin^2\theta+2\cos\theta=0$

$3-4(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta=0$ [D]

$4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$

よって　$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\frac{2}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta=\cos\frac{2}{5}\pi>0$ であるから

$\cos\frac{2}{5}\pi=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

[A]　$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

[B]　加法定理
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

[C]　２倍角の公式
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=1-2\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$

[D]　三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

第10講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3，ウ：−，エ：3

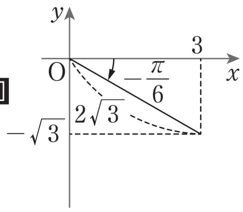
[解説]

$$y=6\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\cos\theta \quad \text{[A]}$$

$$=6\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+2\sqrt{3}\cos\theta$$

$$=3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$$

$$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{[B]}$$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ より

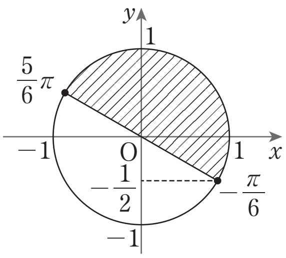
$$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

よって　$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$

ゆえに　$-\sqrt{3}\leqq2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq2\sqrt{3}$

したがって　最大値 $\mathbf{2\sqrt{3}}$ $\left(\theta=\frac{2}{3}\pi\right)$,

最小値 $\mathbf{-\sqrt{3}}$ $(\theta=0)$



[A]　加法定理

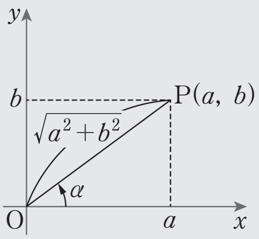
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

[B]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

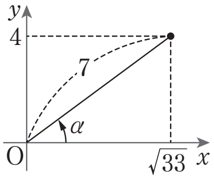
$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



2 [正解] オ：7，カ：4

[解説]

$$y=\sqrt{33}\sin\theta+4\cos\theta$$
$$=7\sin(\theta+\alpha)$$ [B]



ただし

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{33}}{7},\quad \sin\alpha=\frac{4}{7}$$ [C]

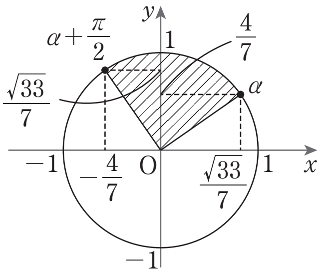
[C]
三角関数の合成 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ で，α が具体的な数値で表せないときは，ただし書きで α に関する説明を添える。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より　$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\alpha+\frac{\pi}{2}$

よって　$\frac{4}{7}\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$

ゆえに　$4\leqq7\sin(\theta+\alpha)\leqq7$

したがって　**最大値 7，最小値 4**



第10講　PART2　確認問題 解答

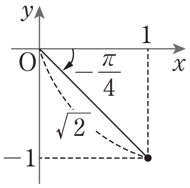
1　**[正解]** ア：⑧，イ：②，ウ：5，エオ：-3

[解説]

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ より

$$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2 \quad [A]$$
$$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\frac{1-t^2}{2}}$



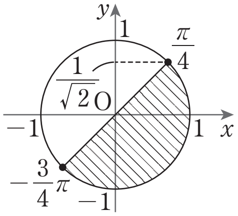
(2)　$t=\sin\theta-\cos\theta$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \quad [B]$$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より　$-\frac{3}{4}\pi\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{4}$

よって

$$-1\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$



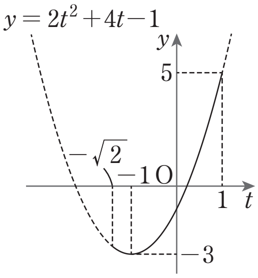
ゆえに

$$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

したがって　$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1}$

(3)　$y=4\sin\theta-4\cos\theta-2\sin 2\theta+1$ [C]

$$=4(\sin\theta-\cos\theta)-2\cdot 2\sin\theta\cos\theta+1$$
$$=4t-4\cdot\frac{1-t^2}{2}+1$$
$$=2t^2+4t-1$$
$$=2(t+1)^2-3$$



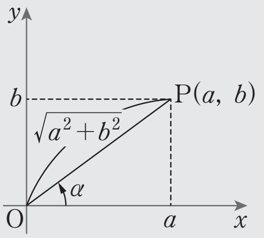
よって，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1$ の範囲において，y は

$t=1$ のとき　最大値 **5**

$t=-1$ のとき　最小値 **-3**　をとる。

[A]
$t=\sin\theta+\cos\theta$ や $t=\sin\theta-\cos\theta$ は，両辺を2乗して三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
を用いると，$\sin\theta\cos\theta$ を t で表すことができる。

[B]　三角関数の合成
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
ただし　$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，
$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



[C]　2倍角の公式
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

第10講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑧，イ：5，ウ：3，エ：2，オ：④

カ：3，キ：2

[解説]

$$y=2\sqrt{3}\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x \quad \text{[A]}$$

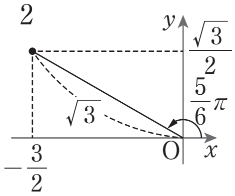
$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-3\cdot\frac{\sin 2x}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{[B]}$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$0\leqq x<\pi$ より

$$\frac{5}{6}\pi\leqq 2x+\frac{5}{6}\pi<\frac{17}{6}\pi$$



よって　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq 1$

ゆえに　$-\sqrt{3}\leqq\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq\sqrt{3}$

したがって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

ここで　$\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)=1$ のとき

$$2x+\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{2}\pi \text{ より}\quad x=\frac{5}{6}\pi$$

$\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)=-1$ のとき

$$2x+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi \text{ より}\quad x=\frac{\pi}{3}$$

よって　$x=\frac{5}{6}\pi$ のとき　最大値 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}$ のとき　最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[A]　2 倍角・半角の公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\Longleftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\Longleftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

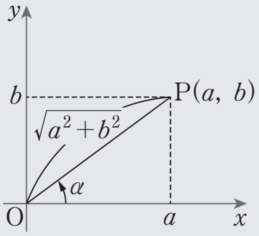
$\Longleftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

[B]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



第11講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：7，イウ：18

[解説]

$$a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2 \quad \text{[A]}$$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^2-2a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}} \quad \text{[B]}$$

$$=3^2-2\cdot 1$$

$$=7$$

$$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}\right) \quad \text{[C]}$$

$$=3(7-1)$$

$$=18$$

（別解）

$$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right) \quad \text{[D]}$$

$$=3^3-3\cdot 1\cdot 3$$

$$=18$$

[A]　$(a^r)^s=a^{rs}$
　　$a^r\cdot a^{-r}=1$

[B]　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

[C]　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

[D]　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

2 **[正解]** エ：2，オ：3

[解説]

$2^x=10^{\frac{3}{2}}$ の両辺を $\frac{2}{3}$ 乗して

$$(2^x)^{\frac{2}{3}}=\left(10^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

すなわち　$\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^x=10$ [A]

この両辺を $\frac{1}{x}$ 乗して

$$2^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}}\ \cdots\cdots①$$ [E]

[E]　$a>0$，$b>0$，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$x\neq 0$ のとき

$a^x=b \Longleftrightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$

$5^y=10^{\frac{3}{2}}$ の両辺を $\frac{2}{3}$ 乗して

$$(5^y)^{\frac{2}{3}}=\left(10^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

すなわち　$\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^y=10$ [A]

この両辺を $\frac{1}{y}$ 乗して

$$5^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{y}}\ \cdots\cdots②$$ [E]

①，②を辺々かけて

$$2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}}\cdot 10^{\frac{1}{y}}$$

$$(2\cdot 5)^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$ [F]

$$10^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

[F]　$a^r b^r=(ab)^r$

$a^r a^s=a^{r+s}$

よって

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$$ [G]

[G]　$a>0$，$a\neq 1$ のとき

$p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$

第11講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2

[解説]

$3\cdot16^x-4^{x+1}-4=0$ より

$$3\cdot(4^x)^2-4\cdot4^x-4=0 \quad \text{[A]}$$

$4^x=t$ とおくと　$t>0$

$$3t^2-4t-4=0$$

$$(3t+2)(t-2)=0$$

$t>0$ より　$t=2$ [B]

ゆえに　$4^x=2$　すなわち　$2^{2x}=2^1$ [C]

よって　$x=\frac{1}{2}$

[A]　底を揃える。

[B]　$a^x>0$ に注意。

[C]　$a>0$，$a\neq1$ のとき
$p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$

2

[正解] ウ：1

[解説]

$5^x-5^{1-x}=4$ より

$$5^x-5\cdot\frac{1}{5^x}=4$$

$$(5^x)^2-4\cdot5^x-5=0$$

$5^x=t$ とおくと　$t>0$

$$t^2-4t-5=0$$

$$(t+1)(t-5)=0$$

$t>0$ より　$t=5$ [B]

ゆえに　$5^x=5$　すなわち　$5^x=5^1$ [C]

よって　$x=1$

3 [正解] エ：⑦

[解説]

$3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1 \leqq 0$ より

$$3\cdot(3^x)^2-4\cdot 3^x+1 \leqq 0$$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$

$$3t^2-4t+1 \leqq 0$$

$$(3t-1)(t-1) \leqq 0$$

よって　$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 1$　（これは $t>0$ を満たす）[B]

ゆえに　$\dfrac{1}{3} \leqq 3^x \leqq 1$

すなわち　$3^{-1} \leqq 3^x \leqq 3^0$ [D]

底 3 は 1 より大きいから　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 0}$

> [D]　指数の大小の性質
> $a>1$ のとき　$p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$
> $0<a<1$ のとき　$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$

4 [正解] オ：①

[解説]

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}-11\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-20>0$ より

$$4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-11\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-20>0$$ [A]

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと　$t>0$

$$4t^2-11t-20>0$$

$$(4t+5)(t-4)>0$$

$t>0$ より $4t+5>0$ であるから [B]

$$t>4$$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>4$

すなわち　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ [D]

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$\boldsymbol{x<-2}$

第 11 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：①，ウ：③

[解説]

$$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}},\ \sqrt[7]{7}=7^{\frac{1}{7}}$$

$2^{\frac{1}{3}}$ と $3^{\frac{1}{6}}$ をそれぞれ 6 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6=2^2=4,\ \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^6=3$$

よって　$\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^6<\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6$ [A]

$3^{\frac{1}{6}}>0$，$2^{\frac{1}{3}}>0$ より　$3^{\frac{1}{6}}<2^{\frac{1}{3}}$

$2^{\frac{1}{3}}$ と $7^{\frac{1}{7}}$ をそれぞれ 21 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{21}=2^7=128,\ \left(7^{\frac{1}{7}}\right)^{21}=7^3=343$$

よって　$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{21}<\left(7^{\frac{1}{7}}\right)^{21}$ [A]

$2^{\frac{1}{3}}>0$，$7^{\frac{1}{7}}>0$ より　$2^{\frac{1}{3}}<7^{\frac{1}{7}}$

以上より　$3^{\frac{1}{6}}<2^{\frac{1}{3}}<7^{\frac{1}{7}}$

すなわち　$\boldsymbol{\sqrt[6]{3}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[7]{7}}$

[A]　底が異なる累乗根の大小を比較するときは，指数を揃えて，次のことを利用するとよい。
$a>0$，$b>0$，n が自然数のとき
$a<b \Longleftrightarrow a^n<b^n$

2 [正解] エ：3，オ：2，カキ：19，ク：1，ケ：2，
コ：1

[解説]

$$y=\frac{1}{2}\cdot16^x-2\cdot4^x+3$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(4^x)^2-2\cdot4^x+3$$ [B]

[B]　底を揃える。

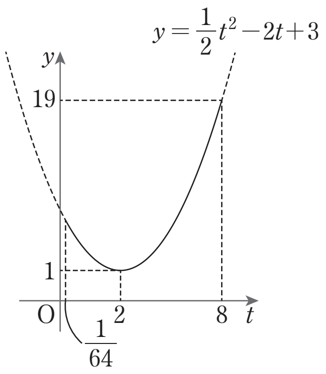
$4^x=t$ とおくと，$-3\leqq x\leqq\frac{3}{2}$ より　$4^{-3}\leqq t\leqq4^{\frac{3}{2}}$

すなわち　$\frac{1}{4^3}\leqq t\leqq(2^2)^{\frac{3}{2}}$　　ゆえに　$\frac{1}{64}\leqq t\leqq8$

このとき，y の式は

$$y=\frac{1}{2}t^2-2t+3=\frac{1}{2}(t-2)^2+1$$ [C]

[C]　t に置き換えて，t の2次関数として最大値，最小値を求める。t のとりうる値の範囲に注意。



よって，$\frac{1}{64}\leqq t\leqq8$ の範囲において，

y は $t=8$ のとき最大，$t=2$ のとき最小となる。

$t=8$ のとき，$4^x=8$ より　$x=\frac{3}{2}$

$t=2$ のとき，$4^x=2$ より

$$2^{2x}=2^1 \qquad x=\frac{1}{2}$$ [D]

[D]　$a>0$，$a\neq1$のとき
$p=q\Longleftrightarrow a^p=a^q$

したがって

$x=\frac{3}{2}$ のとき　**最大値 19**

$x=\frac{1}{2}$ のとき　**最小値 1**

第12講 PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-2，ウ：3，エオ：10，カ：3

[解説]

$x=\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ より

$$x+y=\frac{2}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{2-\sqrt{3}}$$
$$=2\cdot\frac{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2\cdot\frac{4}{4-3}$$
$$=8$$

$$xy=\frac{2\cdot 2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=4$$

よって

$$\log_8\frac{1}{x}+\log_8\frac{1}{y}=\log_8\frac{1}{xy} \quad \text{[A]}$$
$$=\log_8\frac{1}{4}=-\log_8 4$$
$$=-\frac{\log_2 4}{\log_2 8} \quad \text{[B]}$$
$$=-\frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3}=\mathbf{-\frac{2}{3}}$$

また

$$x^2-6xy+y^2=(x+y)^2-8xy=8^2-8\cdot 4$$
$$=32$$

よって

$$\log_{2\sqrt{2}}(x^2-6xy+y^2)=\log_{2\sqrt{2}}32$$
$$=\frac{\log_2 32}{\log_2 2\sqrt{2}} \quad \text{[B]}$$
$$=\frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^{\frac{3}{2}}} \quad \text{[A]}$$
$$=5\div\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{10}{3}}$$

[A] 対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k は実数のとき

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$
$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$
特に $\log_a\dfrac{1}{N}=-\log_a N$
$$\log_a M^k=k\log_a M$$

[B] 底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$c\neq 1$ とすると

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$
特に $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

第12講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2

[解説]

真数は正であるから

$$x+4>0 \text{ かつ } x+7>0$$ [A]

すなわち　$x>-4$ かつ $x>-7$

よって　$x>-4$　……①

このとき，方程式を変形すると

$$\log_2(x+4)-\frac{\log_2(x+7)}{\log_2 2^2}=1$$ [B] [C]

$$\log_2(x+4)-\frac{\log_2(x+7)}{2}=1$$

$$2\log_2(x+4)-\log_2(x+7)=2$$

$$\log_2(x+4)^2=\log_2 4+\log_2(x+7)$$ [D]

$$\log_2(x+4)^2=\log_2 4(x+7)$$

よって

$$(x+4)^2=4(x+7)$$

$$x^2+4x-12=0$$

$$(x-2)(x+6)=0$$

ゆえに　$x=2,\ -6$

①より　$\boldsymbol{x=2}$

[A]　真数が正であることに注意。

[B]　底を揃える。

[C]　底の変換公式
a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$b \neq 1$，$c \neq 1$ とすると

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

特に $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

[D]　対数の性質
$a>0$，$a \neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k は実数のとき

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

特に $\log_a \dfrac{1}{N}=-\log_a N$

$$\log_a M^k=k\log_a M$$

2 [正解] イ：1，ウ：5，エオ：25

[解説]

真数は正で，底は1でない正の数であるから

$x>0$ かつ $x \neq 1$　……①

このとき，方程式を変形すると

$$\log_5 x - \log_x 5^2 = 1$$

$$\log_5 x - 2 \cdot \frac{1}{\log_5 x} = 1$$ [C]

$\log_5 x = t$ とおくと

$$t - \frac{2}{t} = 1$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0$$

よって　$t=-1,\ 2$

ゆえに　$\log_5 x = -1,\ 2$

すなわち　$\log_5 x = \log_5 5^{-1},\ \log_5 5^2$

よって　$\boldsymbol{x = \frac{1}{5},\ 25}$（①を満たす）

3 [正解] カ：⑦

[解説]

真数は正であるから

$1-2x>0$ かつ $5-x>0$ [A]

すなわち　$x<\frac{1}{2}$ かつ $x<5$

よって　$x<\frac{1}{2}$　……(＊)

底3は1より大きいから，不等式より

$1-2x \leqq 5-x$ [E]

$x \geqq -4$

これと(＊)より

$$\boldsymbol{-4 \leqq x < \frac{1}{2}}$$

[E]　対数の大小に関する性質
$a>1$ のとき
$p<q \Longleftrightarrow \log_a p < \log_a q$
$0<a<1$ のとき
$p<q \Longleftrightarrow \log_a p > \log_a q$

4 [正解] キ：⑨

[解説]

真数は正であるから

$x>0$ かつ $x^2>0$ [A]

よって　$x>0$　……(∗)

このとき，不等式を変形すると

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+3\cdot 2\frac{\log_{\frac{1}{2}}x}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2}>4$$ [C]

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+3\log_{\frac{1}{2}}x-4>0$$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$ とおくと

$$t^2+3t-4>0$$

$$(t+4)(t-1)>0$$

よって

$$t<-4,\ 1<t$$

ゆえに

$$\log_{\frac{1}{2}}x<-4,\ 1<\log_{\frac{1}{2}}x$$

すなわち

$$\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4},\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x$$

よって

$$\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}16,\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x$$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$x<\frac{1}{2},\ 16<x$ [E]

これと(∗)より

$$\boldsymbol{0<x<\frac{1}{2},\ 16<x}$$

第 12 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：④，ウ：③，エ：②

[解説]

$\log_{0.3}5$ と $\log_{0.3}3$ について [A]

底 0.3 は 1 より小さく，かつ真数について

$1<3<5$ であるから

$$\log_{0.3}5<\log_{0.3}3<0 \quad \text{[B]}$$

$\log_2 5$ と $\log_3 5$ について

$$\log_2 5=\frac{1}{\log_5 2},\quad \log_3 5=\frac{1}{\log_5 3} \quad \text{[C]}$$

底 5 は 1 より大きく，かつ真数について

$1<2<3$ であるから

$$0<\log_5 2<\log_5 3 \quad \text{[B]}$$

よって　$0<\dfrac{1}{\log_5 3}<\dfrac{1}{\log_5 2}$

すなわち　$0<\log_3 5<\log_2 5$

したがって

$$\boldsymbol{\log_{0.3}5<\log_{0.3}3<\log_3 5<\log_2 5}$$

[A]　対数の正負で分類。
$a>1$ のとき
　$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$
　$0<p<1 \Longleftrightarrow \log_a p<0$
$0<a<1$ のとき
　$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p<0$
　$0<p<1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$

[B]　対数の大小に関する性質
$a>1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow \log_a p<\log_a q$
$0<a<1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow \log_a p>\log_a q$

[C]　$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

2 [正解] オ：3，カ：3，キ：4，ク：1，ケコ：−5

[解説]

$$y=\left(\log_3\frac{x^4}{9}\right)\left(\log_3\frac{9\sqrt{3}}{x}\right)$$

$$=(\log_3 x^4-\log_3 9)(\log_3 9\sqrt{3}-\log_3 x)$$ [D]

$$=(4\log_3 x-2)\left(\frac{5}{2}-\log_3 x\right)$$

$\log_3 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 9$ より [E]

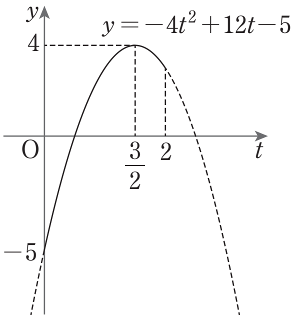
$$\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 9$$

$$0\leqq t\leqq 2$$

このとき，y の式は

$$y=(4t-2)\left(\frac{5}{2}-t\right)=-4t^2+12t-5$$

$$=-4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+4$$



よって，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲において，

y は $t=\frac{3}{2}$ のとき最大，$t=0$ のとき最小となる。

$t=\frac{3}{2}$ のとき，$\log_3 x=\frac{3}{2}$ より　$x=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

$t=0$ のとき，$\log_3 x=0$ より　$x=1$

したがって

$x=\mathbf{3\sqrt{3}}$ のとき　最大値 **4**

$x=\mathbf{1}$ のとき　最小値 **−5**

[D]　対数の性質
$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k は実数のとき

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

特に $\log_a\frac{1}{N}=-\log_a N$

$$\log_a M^k=k\log_a M$$

[E]　t に置き換えて，t の 2 次関数として最大値，最小値を求める。t のとりうる値の範囲に注意。

3 **[正解]** サ：4，シ：2，ス：2，セ：0

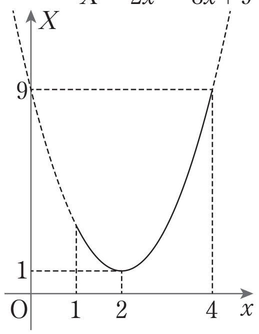
[解説]

$X=2x^2-8x+9$ とおくと

$$X=2(x-2)^2+1$$

$1\leqq x\leqq 4$ より　$1\leqq X\leqq 9$ [F]

[F]　真数が最大，最小になるときを考える。



ゆえに，$y=\log_3(2x^2-8x+9)=\log_3 X$ は

$X=9$ すなわち $x=4$ のとき [B]

最大値 $\log_3 9=\mathbf{2}$

$X=1$ すなわち $x=\mathbf{2}$ のとき

最小値 $\log_3 1=\mathbf{0}$

をとる。

第13講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：9

[解説]

$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = M$ とおく。

左辺は正より，両辺の 5 を底とする対数をとると

$$\log_5\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = \log_5 M$$

$$\log_5\frac{3}{2}\cdot\log_5\frac{1}{25} = \log_5 M \quad \text{[A]}$$

$$\log_5\frac{3}{2}\cdot\log_5 5^{-2} = \log_5 M$$

$$-2\log_5\frac{3}{2} = \log_5 M$$

$$\log_5\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \log_5 M$$

よって　$M = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} = \dfrac{4}{9}$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = \mathbf{\dfrac{4}{9}}$

(別解)

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = (5^{-2})^{\log_5 \frac{3}{2}} = 5^{-2\log_5 \frac{3}{2}}$$

$$= 5^{\log_5 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$$

$$= 5^{\log_5 \frac{4}{9}} = \mathbf{\frac{4}{9}} \quad \text{[B]}$$

[A]　$\log_a M^k = k\log_a M$

[B]　対数の定義
$a>0$，$a \neq 1$，$M>0$ のとき
$a^p = M \Longleftrightarrow p = \log_a M$
より
$a^{\log_a M} = M$

2 **[正解]** ウ：3

[解説]

$2^x=3^y=5^z=\sqrt[3]{30}$ の各辺は正であるから，各辺の2を底とする対数をとると

$$\log_2 2^x=\log_2 3^y=\log_2 5^z=\log_2 \sqrt[3]{30}$$

すなわち

$$x=y\log_2 3=z\log_2 5=\frac{1}{3}\log_2 30$$ [A]

$2^x\neq1$ かつ $3^y\neq1$ かつ $5^z\neq1$ より

$$x\neq0 \text{ かつ } y\neq0 \text{ かつ } z\neq0$$

よって

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{\log_2 30}$$

$y=\dfrac{\log_2 30}{3\log_2 3}$ より

$$\frac{1}{y}=\frac{3\log_2 3}{\log_2 30}$$

$z=\dfrac{\log_2 30}{3\log_2 5}$ より

$$\frac{1}{z}=\frac{3\log_2 5}{\log_2 30}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{3}{\log_2 30}+\frac{3\log_2 3}{\log_2 30}+\frac{3\log_2 5}{\log_2 30}\\&=\frac{3(1+\log_2 3+\log_2 5)}{\log_2 30}\\&=\frac{3\log_2 2\cdot3\cdot5}{\log_2 30}=\frac{3\log_2 30}{\log_2 30}\\&=3\end{aligned}$$ [C]

[C]　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

第13講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：76，ウ：3，エ：4

[解説]

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{70} &= 70\log_{10} 2^2\cdot 3\\ &= 70(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &= 70(2\times 0.3010 + 0.4771)\\ &= 70\times 1.0791\\ &= 75.537\end{aligned}$$

よって　$75 < \log_{10} 12^{70} < 76$

ゆえに　$10^{75} < 12^{70} < 10^{76}$ [A]

したがって，12^{70} の桁数は　**76**

$\log_{10} 12^{70} = 75.537$ より [B]

$$12^{70} = 10^{75.537} = 10^{0.537}\times 10^{75}$$

ここで　$10^{0.4771} = 3$

また，$10^{0.3010} = 2$ より

$$10^{0.3010\times 2} = 2^2$$

$$10^{0.6020} = 4$$

ゆえに

$$3 < 10^{0.537} < 4$$

よって　$3\times 10^{75} < 10^{0.537}\times 10^{75} < 4\times 10^{75}$

すなわち　$3\times 10^{75} < 12^{70} < 4\times 10^{75}$

したがって，12^{70} の最高位は　**3**

12^n の一の位は，$n = 1$，2，3，4，5，……のとき

2，4，8，6，2，……

であり，4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。

$12^{70} = 12^{4\times 17+2}$ より，12^{70} の一の位は　4

> [A]　正の数 N の整数部分が n 桁
> $\Longleftrightarrow 10^{n-1} \leqq N < 10^n$
> $\Longleftrightarrow n-1 \leqq \log_{10} N < n$

> [B]　正の数 N の最高位の数字は，$\log_{10} N$ の小数部分に注目する。

2 **[正解]** オカ：16，キ：2

[解説]

$$\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}=\log_{10}6^{-20}$$
$$=-20\log_{10}2\cdot3$$
$$=-20(\log_{10}2+\log_{10}3)$$
$$=-20(0.3010+0.4771)$$
$$=-20\times0.7781$$
$$=-15.562$$

よって　$-16<\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}<-15$ [C]

ゆえに　$10^{-16}<\left(\frac{1}{6}\right)^{20}<10^{-15}$

したがって，**小数第 16 位**に初めて 0 でない数字が現れる。

$\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}=-15.562$ より

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{20}=10^{-15.562}$$

両辺に 10^{16} を掛けると

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{20}\times10^{16}=10^{-15.562}\times10^{16}$$
$$=10^{0.438}$$

この値の整数部分が求める数である。 [D]

$10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ より

$$2<10^{0.438}<3$$

よって　$2<\left(\frac{1}{6}\right)^{20}\times10^{16}<3$

したがって，$\left(\frac{1}{6}\right)^{20}$ を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は　**2**

> [C]　正の数 N の小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる
> $\iff\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\leqq N<\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$
> $\iff 10^{-n}\leqq N<10^{-n+1}$
> $\iff -n\leqq\log_{10}N<-n+1$

> [D]　小数第 n 位に初めて現れる 0 でない数字を求めるときは，10^{n} を掛けた数の整数部分を求めればよい。

3 **[正解]** **クケ**：12，**コサ**：17

[解説]

$(1.5)^n$ の整数部分が 3 桁のとき

$$10^2 \leqq (1.5)^n < 10^3$$ [A]

すなわち

$$2 \leqq \log_{10}(1.5)^n < 3$$

ここで

$$\begin{aligned}\log_{10}(1.5)^n &= n\log_{10}1.5\\ &= n\log_{10}\frac{3}{2}\\ &= n(\log_{10}3-\log_{10}2)\\ &= n(0.4771-0.3010)\\ &= 0.1761n\end{aligned}$$

よって

$$2 \leqq 0.1761n < 3$$

$$\frac{2}{0.1761} \leqq n < \frac{3}{0.1761}$$

$$11.3\cdots \leqq n < 17.03\cdots$$

したがって，求める n の値の範囲は

$$\boldsymbol{12 \leqq n \leqq 17}$$

4 **[正解]** **シ**：7

[解説]

$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{1000}$ より

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \log_{10}\frac{1}{1000}$$

$$-n\log_{10}3 < -3$$

よって

$$n > \frac{3}{\log_{10}3} = \frac{3}{0.4771} = 6.2\cdots$$

したがって，求める自然数 n の最小値は　**7**

第13講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥，イ：③，ウエ：-2

[解説]

(1)　$3^x>0$，$3^{-x}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から [A]

$$3^x+3^{-x} \geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$$

等号が成り立つのは，$3^x=3^{-x}$ のときであるから

$$x=-x \qquad \text{ゆえに} \quad x=0$$

よって，求める t の値の範囲は　$\boldsymbol{t \geqq 2}$

(2)　
$$\begin{aligned} 9^x+9^{-x} &= (3^x)^2+(3^{-x})^2 \\ &= (3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x} \\ &= t^2-2 \end{aligned}$$

よって

$$y=t^2-2-2t=\boldsymbol{t^2-2t-2}$$

$y=(t-1)^2-3$ $(t \geqq 2)$ より，$t=2$ のとき，

すなわち，$x=0$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-2}$

[A]　相加平均と相乗平均の大小関係
$a>0$，$b>0$ のとき
$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$
等号が成り立つのは，$a=b$ のとき。

2 [正解] オ：5，カ：2

[解説]

$$\log_x y^2+\log_y\sqrt{xy}$$
$$=2\log_x y+\frac{1}{2}\log_y xy$$
$$=2\log_x y+\frac{1}{2}(\log_y x+\log_y y)$$
$$=2\log_x y+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_x y}+1\right) \quad \text{[B]}$$
$$=2\log_x y+\frac{1}{2\log_x y}+\frac{1}{2}$$

[B]　$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

$x>1$，$y>1$ のとき　$2\log_x y>0$，$\dfrac{1}{2\log_x y}>0$ [C]

[C]　$a>1$ のとき
$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$

ゆえに，相加平均と相乗平均の大小関係から [A]

$$2\log_x y+\frac{1}{2\log_x y}+\frac{1}{2}$$
$$\geqq 2\sqrt{2\log_x y\cdot\frac{1}{2\log_x y}}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

等号が成り立つのは，$2\log_x y=\dfrac{1}{2\log_x y}$ のときで

ある。このとき　$(\log_x y)^2=\dfrac{1}{4}$

$\log_x y>0$ より

$$\log_x y=\frac{1}{2}$$
$$=\log_x\sqrt{x}$$

ゆえに　$y=\sqrt{x}$

以上から，求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

第14講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** アイウ：-19，エ：④，オ：⑤，カ：±，キ：7

[解説]

(1) $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$ [A]

$=\dfrac{(-4^3+2\cdot4+3)-(-1^3+2\cdot1+3)}{3}=\mathbf{-19}$

(2) 平均変化率は

$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$=\dfrac{\{-(c+h)^3+2(c+h)+3\}-(-c^3+2c+3)}{h}$

$=\dfrac{-3c^2h-3ch^2-h^3+2h}{h}$

$=\mathbf{-3c^2-3ch-h^2+2}$

よって

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$ [B]

$$=\lim_{h\to0}(-3c^2-3ch-h^2+2)$$

$$=\mathbf{-3c^2+2}$$

(3) $-3c^2+2=-19$ より　$c^2=7$

よって　$c=\pm\sqrt{\mathbf{7}}$

[A]　平均変化率
関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率は
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

[B]　微分係数
x の値が c から $c+h$ まで変化するときの平均変化率は
$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$
関数 $f(x)$ の $x=c$ における微分係数は
$f'(c)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

第 14 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-4，ウ：2，エ：1，オ：4，カ：9，キ：4

[解説]

$f(x)=-2x^3-x^2+1$ とおくと

$$f'(x)=-6x^2-2x$$

点 A における接線の傾きは　$f'(-1)=-4$

法線の傾きは　$\dfrac{1}{4}$

よって，求める接線の方程式は

$$y=-4\{x-(-1)\}+2$$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{y=-4x-2}$

法線の方程式は

$$y=\frac{1}{4}\{x-(-1)\}+2$$ [A]

すなわち　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{4}}$

[A]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における
接線の方程式
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$
法線の方程式
$y=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$
ただし，$f'(a)\neq 0$

2 **[正解]** **クケ**：-3，**コ**：7，**サ**：4，**シス**：-5

[解説]

$f(x)=x^3-6x^2+6x+3$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12x+6$$

接点の座標を $(a,\ a^3-6a^2+6a+3)$ とおくと，接線の傾きは　$f'(a)=3a^2-12a+6$ [B]

よって，接線の方程式は [A]

$$y=(3a^2-12a+6)(x-a)+a^3-6a^2+6a+3$$

すなわち

$$y=(3a^2-12a+6)x-2a^3+6a^2+3 \quad \cdots\cdots ①$$

①が点 $(2,\ 1)$ を通るから

$$1=(3a^2-12a+6)\cdot 2-2a^3+6a^2+3$$

$$2a^3-12a^2+24a-14=0$$

$$a^3-6a^2+12a-7=0$$

$$(a-1)(a^2-5a+7)=0$$

$a^2-5a+7=\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より

$$a=1$$

よって，求める接線の方程式は，①より

$$\boldsymbol{y=-3x+7}$$

この接線と曲線の共有点のうち，接点以外の点の x 座標は，方程式

$$x^3-6x^2+6x+3=-3x+7$$

の $x=1$ 以外の実数解である。

$$x^3-6x^2+9x-4=0$$

$$(x-1)^2(x-4)=0$$

よって　$x=1,\ 4$

$f(4)=4^3-6\cdot 4^2+6\cdot 4+3=-5$ より，

求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(4,\ -5)}$

[B]　接点の座標を $(a,\ f(a))$ とおき，接線の方程式を a を用いて表す。

第14講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3，ウエ：-4，オカ：12

[解説]

$f(x)=x^2-6x+13$ とおくと

$$f'(x)=2x-6$$

よって，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(s,\ s^2-6s+13)$ における接線の方程式は [A]

$$y=(2s-6)(x-s)+s^2-6s+13 \quad \text{[B]}$$

すなわち

$$y=(2s-6)x-s^2+13 \quad \cdots\cdots ①$$

$g(x)=-x^2+4x-4$ とおくと

$$g'(x)=-2x+4$$

よって，放物線 $y=g(x)$ 上の点 $(t,\ -t^2+4t-4)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+4)(x-t)-t^2+4t-4 \quad \text{[B]}$$

すなわち

$$y=(-2t+4)x+t^2-4 \quad \cdots\cdots ②$$

2 直線①，②が一致するとき，係数を比較して

$$\begin{cases} 2s-6=-2t+4 \\ -s^2+13=t^2-4 \end{cases}$$

これを解いて

$$(s,\ t)=(4,\ 1),\ (1,\ 4)$$

よって，求める共通接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=2x-3,\ \ y=-4x+12}$$

[A]　2 つの放物線において，接点の x 座標をそれぞれ s，t として接線の方程式を求める。求めた 2 つの方程式が一致するときに共通接線となるから，そのときの s，t の値を求めればよい。

[B]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2

[正解] キ：5，ク：－，ケ：1

[解説]

$f(x)=x^3+2x^2+1$，$g(x)=3x^2+px+4$ とおくと

$$f'(x)=3x^2+4x,\ g'(x)=6x+p$$

2 曲線が $x=\alpha$ の点で接するための条件は [C]

$$f(\alpha)=g(\alpha)\ \cdots\cdots①$$

かつ　$f'(\alpha)=g'(\alpha)\ \cdots\cdots②$

①より　$\alpha^3+2\alpha^2+1=3\alpha^2+p\alpha+4$

すなわち　$\alpha^3-\alpha^2-p\alpha-3=0\ \cdots\cdots①'$

②より　$3\alpha^2+4\alpha=6\alpha+p$

すなわち　$p=3\alpha^2-2\alpha\ \cdots\cdots②'$

②′を①′に代入して

$$\alpha^3-\alpha^2-(3\alpha^2-2\alpha)\alpha-3=0$$

$$2\alpha^3-\alpha^2+3=0$$

$$(\alpha+1)(2\alpha^2-3\alpha+3)=0$$

$2\alpha^2-3\alpha+3=2\left(\alpha-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}>0$ より $\alpha=-1$

ゆえに，②′より　$\boldsymbol{p=5}$

また　$f(-1)=2$，$f'(-1)=-1$

よって，求める共通接線の方程式は

$$y=-\{x-(-1)\}+2$$

すなわち　$\boldsymbol{y=-x+1}$

[C]　2 曲線が点 A で接するのは，2 曲線が点 A を通り，かつ点 A における 2 曲線の接線が一致するときである。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=\alpha$ の点で接する条件は
$f(\alpha)=g(\alpha)$ かつ $f'(\alpha)=g'(\alpha)$

第15講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：9，エオカ：-12，キ：7

[解説]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$x=1$ で極小値 2 をとるから

$$f'(1)=0,\ f(1)=2$$ [A]

$x=2$ で極大値 3 をとるから

$$f'(2)=0,\ f(2)=3$$

よって

$$3a+2b+c=0,$$
$$a+b+c+d=2,$$
$$12a+4b+c=0,$$
$$8a+4b+2c+d=3$$

これを解いて　$a=-2$，$b=9$，$c=-12$，$d=7$

このとき

$$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+7$$ [B]

$$f'(x)=-6x^2+18x-12$$
$$=-6(x-1)(x-2)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 2	↗	極大 3	↘

したがって，$f(x)$ は，確かに $x=1$ で極小値 2，$x=2$ で極大値 3 をとる。

よって　$\boldsymbol{a=-2,\ b=9,\ c=-12,\ d=7}$

[A]　関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとる $\Longrightarrow f'(\alpha)=0$
この逆は成り立たないことに注意。
すなわち，$f'(\alpha)=0$ であっても $f(\alpha)$ が極値になるとは限らない。

[B]　求めた a，b，c，d の値について，題意の通りに $f(x)$ が極値をとることを確かめる。

（別解）

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \cdots\cdots ①$$

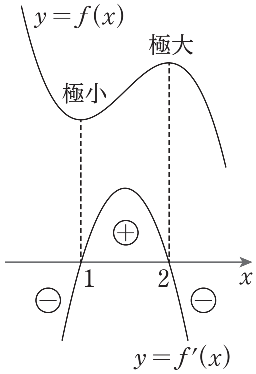
$f(x)$ が，$x=1$ で極小値，$x=2$ で極大値をとり，

①より，$f'(x)$ の x^2 の係数が $3a$ であることから

$$f'(x)=3a(x-1)(x-2)$$

$$=3ax^2-9ax+6a \quad (a<0) \cdots\cdots ②$$

と表せる。



①と②を係数比較して　$2b=-9a$，$c=6a$

すなわち　$b=-\dfrac{9}{2}a$，$c=6a$

このとき，$f(x)=ax^3-\dfrac{9}{2}ax^2+6ax+d$ であるから，

$f(1)=2$，$f(2)=3$ より

$$\frac{5}{2}a+d=2,$$

$$2a+d=3$$

よって　$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=9}$，$\boldsymbol{c=-12}$，$\boldsymbol{d=7}$

（$a<0$ を満たす）

2 [正解] ク：②

[解説]

$f(x)=\frac{4}{3}x^3+(a-3)x^2-(2a-3)x+1$ より

$$f'(x)=4x^2+2(a-3)x-(2a-3)$$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。 [C]

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

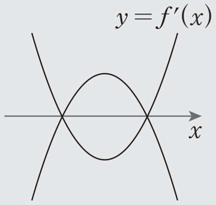
$$\frac{D}{4}=(a-3)^2+4(2a-3)>0$$

よって　$a^2+2a-3>0$

$$(a+3)(a-1)>0$$

したがって　$\boldsymbol{a<-3,\ 1<a}$

[C]　3 次関数 $f(x)$ が極値をもつ
$\Longleftrightarrow$ 2 次関数 $f'(x)$ の値が正から負，または負から正に変わる点が少なくとも 1 つ存在する。
$\Longleftrightarrow$ 2 次関数 $f'(x)$ の値が正から負に変わる点が存在すれば必ず負から正に変わる点も存在する。逆もいえる。
$\Longleftrightarrow$ 2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。



3 [正解] ケ：0，コ：②，サ：①，シ：⑤，ス：④，

セ：⑤，ソ：④，タ：②，チ：①

[解説]

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x$ より

$$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$$
$$=(x+a)(3x-a)$$

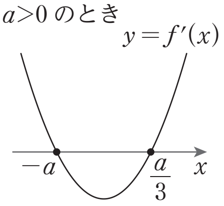
$f'(x)=0$ とすると　$x=-a,\ \dfrac{a}{3}$

$a>0$ のとき　[D]

$x=-a$ で極大値 a^3，

$x=\dfrac{a}{3}$ で極小値 $-\dfrac{5}{27}a^3$

をとる。

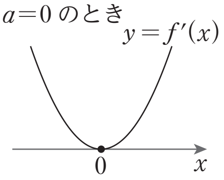


$a=0$ のとき

$f'(x)=3x^2\geqq 0$より，

$f(x)$ は単調増加する。

よって　極値はない。

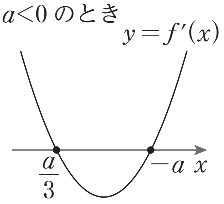


$a<0$ のとき

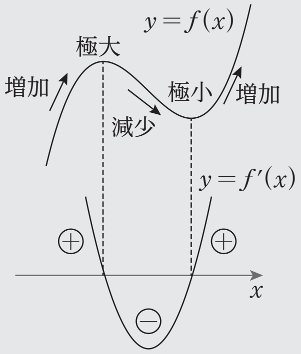
$x=\dfrac{a}{3}$ で極大値 $-\dfrac{5}{27}a^3$，

$x=-a$ で極小値 a^3

をとる。



[D]　3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が正のとき，2 次関数 $f'(x)$ の値が正から負，または負から正に変わる点と，$f(x)$ が極値をとる点の対応は，次の図の通り。



$x=\alpha$ で $f'(x)$ の符号が

- 正から負に変わる場合
  $x=\alpha$ で極大になる
- 負から正に変わる場合
  $x=\alpha$ で極小になる

第15講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$y=x^3-|x^2-x|-1$ より

$x^2-x=x(x-1)\geqq 0$ すなわち $x\leqq 0$，$1\leqq x$ のとき [A]

$$y=f_1(x)=x^3-(x^2-x)-1$$
$$=x^3-x^2+x-1$$

$x^2-x=x(x-1)\leqq 0$ すなわち $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$y=f_2(x)=x^3+(x^2-x)-1$$
$$=x^3+x^2-x-1$$

とおくと

$x<0$，$1<x$ のとき

$$y'=f_1{}'(x)=3x^2-2x+1$$
$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

$0<x<1$ のとき

$$y'=f_2{}'(x)=3x^2+2x-1$$

$f_2{}'(x)=0$ とすると

$$(3x-1)(x+1)=0$$

$0<x<1$ より　$x=\dfrac{1}{3}$

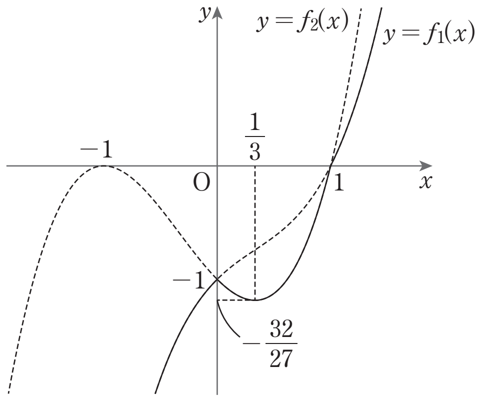
よって，y の増減表は次のようになる。 [B]

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	／	$-$	0	$+$	／	$+$
y	↗	極大 -1	↘	極小 $-\frac{32}{27}$	↗	0	↗

したがって，グラフは次図の実線部分。

[A]　絶対値を含む関数のグラフをかくときは，場合分けにより絶対値記号をはずし，場合分けごとに定義域に注意して増減を調べ，グラフをかく。

[B]　場合の分かれ目において，y' が存在しないとき，その前後で y' の符号が変化すれば，その点において極値をとる。



y
$y=f_2(x)$
$y=f_1(x)$
$\frac{1}{3}$
-1
O
1
x
-1
$-\frac{32}{27}$

第15講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：4，ウ：⑤，エ：1，オ：4，
カ：②

[解説]

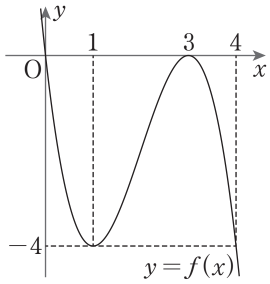
$$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 3$

よって，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次の通り。

x	0	…	1	…	3	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右図。



また，$f(x)=-4$ とすると

$$-x^3+6x^2-9x=-4$$

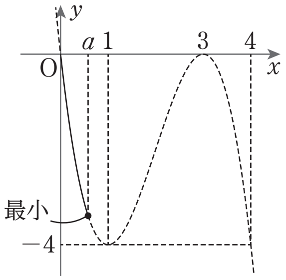
$$(x-1)^2(x-4)=0$$

よって，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=-4$ の共有点の x 座標は　$x=1,\ 4$ [A]

(i)　$0<a<1$ のとき [B]

右図より，$f(x)$ は $x=a$ のとき最小となり

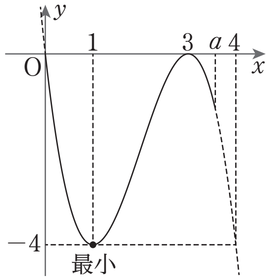
$$m(a)=f(a)=-a^3+6a^2-9a$$



(ii)　$1 \leqq a \leqq 4$ のとき

右図より，$f(x)$ は $x=1$ のとき最小となり

$$m(a)=f(1)=-4$$



[A]　区間の端点の y 座標と極値が一致するときの x 座標を求めておく。

[B]　定義域を変化させたとき，最大値，最小値が変わるところが場合の分かれ目。「極値をとる x 座標」や，「区間の端点の y 座標と極値が一致するときの x 座標」が，場合の分かれ目の候補となる。

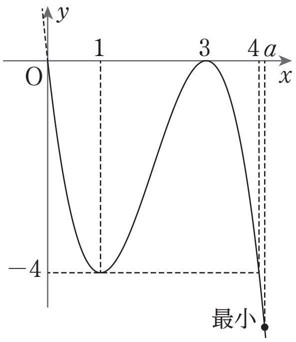
(iii)　$4 < a$ のとき

右図より，$f(x)$ は

$x = a$ のとき最小となり

$m(a) = f(a)$

$= -a^3 + 6a^2 - 9a$



(i)〜(iii)より

$0 < a < 1$，$4 < a$ のとき　$m(a) = -a^3 + 6a^2 - 9a$

$1 \leqq a \leqq 4$ のとき　$m(a) = -4$

第16講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑨，イ：③

[解説]

方程式を変形すると　$x^4-4x^3-12x^2+32x=a$

ここで　$y=x^4-4x^3-12x^2+32x$ ……(＊)

とすると，方程式の異なる実数解およびその個数は，(＊)のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標および個数と一致する。 [A]

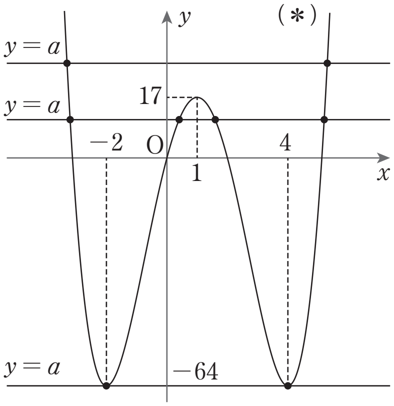
[A]　方程式 $f(x)=a$ の実数解
$\Longleftrightarrow$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標

$y'=4x^3-12x^2-24x+32=4(x-1)(x^2-2x-8)$
$=4(x+2)(x-1)(x-4)$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	…	-2	…	1	…	4	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -64	↗	極大 17	↘	極小 -64	↗

ゆえに，(＊)のグラフは次図。



(＊)のグラフと直線 $y=a$ の共有点の x 座標および個数を考える。

(1)　グラフより，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a=-64,\ a>17}$$

(2)　グラフより，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{0<a<17}$$

第16講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：⑦

[解説]

$y=-x^3+x$ より

$$y'=-3x^2+1$$

よって，曲線上の点 $(t,\ -t^3+t)$ における接線の方程式は

$$y=(-3t^2+1)(x-t)-t^3+t \quad \text{[A]}$$

すなわち

$$y=(-3t^2+1)x+2t^3$$

この接線が点 $(a,\ b)$ を通るとき

$$b=(-3t^2+1)a+2t^3$$

すなわち

$$2t^3-3at^2+a-b=0 \ \cdots\cdots(*)$$

3 次関数のグラフにおいては，接点が異なれば接線も異なる。[B]

よって，点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=-x^3+x$ に 3 本の接線が引けるための条件は，t の 3 次方程式$(*)$が異なる 3 つの実数解をもつことである。

したがって，

$$f(t)=2t^3-3at^2+a-b$$

とすると，$f(t)$ は極値をもち，

(極大値) × (極小値) <0 ……$(**)$ [C]

となる。

ここで　$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a=0$ のとき

$$f'(t)=6t^2 \geqq 0$$

であるから $f(t)$ は単調増加する。

[A]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
　$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

[B]　3 次関数のグラフにおいては接点が異なれば接線も異なる。接線の本数は接点の個数（すなわち，3 次方程式（$*$）の実数解の個数）と一致する。

[C]
3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ
$\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と 3 点で交わる
$\Longleftrightarrow$ 3次関数 $y=f(x)$ が極値をもち，(極大値) >0 かつ (極小値) <0
$\Longleftrightarrow$ (極大値) × (極小値) <0

よって，3次方程式(＊)すなわち $2t^3-b=0$ の実数解は1つであるから，不適。

$a \neq 0$ のとき

$f'(t)=0$ とすると，$6t(t-a)=0$ より，$t=0$，a であるから，$f(t)$ は2つの極値 $f(0)$，$f(a)$ をもつ。

ゆえに，(＊＊)より　$f(0)f(a)<0$

よって，求める a，b の条件は

$$\boldsymbol{(a-b)(-a^3+a-b)<0}$$

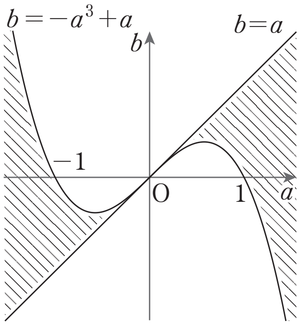
ゆえに

$$\begin{cases} a-b>0 \\ -a^3+a-b<0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a-b<0 \\ -a^3+a-b>0 \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} b<a \\ b>-a^3+a \end{cases} \text{ または } \begin{cases} b>a \\ b<-a^3+a \end{cases}$$

したがって，求める点 $(a,\ b)$ の存在範囲は次図斜線部分(境界は含まない)。



第16講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑨

[解説]

$f(x)=2x^3-3ax^2+a+6$ とおく。

$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $2x^3-3ax^2+a+6>0$

が成り立つのは，$x \geqq 0$ において

$$(f(x)\text{ の最小値})>0 \cdots\cdots (*)$$ [A]

のときである。

> [A]　$x \geqq 0$ において
> 不等式 $f(x)>0$ がつねに成立
> $\Longleftrightarrow$
> ($x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値) >0

$$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$$

より，$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ a$

(i)　$a<0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$a+6$	$\nearrow$

よって，$f(x)$ の最小値は　$f(0)=a+6$

$(*)$より　$a+6>0$　すなわち　$a>-6$

$a<0$ より　$-6<a<0$

(ii)　$a=0$ のとき

$$f'(x)=6x^2 \geqq 0$$

より，$f(x)$ は単調増加するから，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=a+6=6>0$

よって，$(*)$は成り立つ。

(iii)　$a>0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$a+6$	↘	極小 $-a^3+a+6$	↗

よって，$f(x)$ の最小値は　$f(a)=-a^3+a+6$

$(*)$ より　$-a^3+a+6>0$

すなわち　$(a-2)\left(a^2+2a+3\right)<0$

$a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$ より　$a-2<0$

すなわち　$a<2$

$a>0$ より　$0<a<2$

(i)～(iii)より，求める a の値の範囲は

$-6<a<2$

第17講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：9

[解説]

$$\int_{-1}^{2}\left(3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(2^3-\frac{1}{3}\cdot 2^2+\frac{1}{3}\cdot 2\right)$$

$$-\left\{(-1)^3-\frac{1}{3}\cdot(-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(-1)\right\}$$ [A]

$=9$

（別解）

$$\int_{-1}^{2}\left(3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}3x^2\,dx-\int_{-1}^{2}\frac{2}{3}xdx+\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}dx$$ [B]

$$=[x^3]_{-1}^{2}-\left[\frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x\right]_{-1}^{2}$$

$$=2^3-(-1)^3-\frac{1}{3}\{2^2-(-1)^2\}+\frac{1}{3}\{2-(-1)\}$$

$=9$

[A]　定積分
関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

[B]　定積分の性質
k, l は定数とすると

$$\int_a^b\{kf(x)\pm lg(x)\}dx$$

$$=k\int_a^b f(x)dx\pm l\int_a^b g(x)dx$$

（複号同順）

2 [正解] イウエ：-66

[解説]

$$\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt+\int_{3}^{-1}(3t^2+2)(1-3t)dt$$

$$=\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt-\int_{3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt$$

$$=\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt$$

$$+\int_{-1}^{3}(3t^2+2)(3t-1)dt \quad \text{[C]}$$

$$=\int_{-3}^{3}(3t^2+2)(3t-1)dt \quad \text{[D]}$$

$$=\int_{-3}^{3}(9t^3-3t^2+6t-2)dt$$

$$=2\int_{0}^{3}(-3t^2-2)dt \quad \text{[E]}$$

$$=-2\left[t^3+2t\right]_0^3$$

$$=-2(3^3+2\cdot 3)$$

$$=-66$$

[C]　定積分の性質

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

[D]　定積分の性質

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

[E]

n が奇数のとき　$\int_{-a}^{a} x^n\,dx=0$

n が偶数のとき　$\int_{-a}^{a} x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$

第17講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4

[解説]

$$6x|2x-1|$$

$$=\begin{cases} -6x(2x-1)=-12x^2+6x & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right) \\ 6x(2x-1)=12x^2-6x & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)\end{cases}$$

であるから

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}6x|2x-1|dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-12x^2+6x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(12x^2-6x)dx \quad \text{[A]}$$

$$=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-12x^2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(12x^2-6x)dx \quad \text{[B]}$$

$$=2\Big[-4x^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[4x^3-3x^2\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left\{1^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}-3\left\{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

[A]　絶対値記号を場合分けによってはずし，絶対値記号をはずす境目の値で積分区間を分け，それぞれの区間において場合分けによって絶対値記号をはずした関数を用いて積分を行う。

[B]

n が奇数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=0$

n が偶数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=2\int_{0}^{a}x^n\,dx$

2 **[正解]** ウエ：12

[解説]

$3x^2+6x=3x(x+2)$ より

$$|3x^2+6x|=\begin{cases}3x^2+6x & (-3\leqq x\leqq -2)\\ -3x^2-6x & (-2\leqq x\leqq 0)\\ 3x^2+6x & (0\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

であるから

$$\int_{-3}^{1}|3x^2+6x|dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(3x^2+6x)dx+\int_{-2}^{0}(-3x^2-6x)dx \quad \text{[A]}$$

$$+\int_{0}^{1}(3x^2+6x)dx$$

$$=\Big[x^3+3x^2\Big]_{-3}^{-2}+\Big[-x^3-3x^2\Big]_{-2}^{0}+\Big[x^3+3x^2\Big]_{0}^{1}$$

$$=(-2)^3-(-3)^3+3\{(-2)^2-(-3)^2\}$$

$$-\{-(-2)^3-3(-2)^2\}+1^3+3\cdot 1^2$$

$$=\mathbf{12}$$

第17講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：6，イ：5，ウ：2，エ：5

[解説]

$$f(x)=x+\int_0^1 xf(t)dt-\int_0^1 2tf(t)dt$$

$$=x+x\int_0^1 f(t)dt-2\int_0^1 tf(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=a$，$\int_0^1 tf(t)dt=b$ とおくと **[A]**

$$f(x)=x+ax-2b=(a+1)x-2b$$

[A]　$\int_0^1 f(t)dt$，$\int_0^1 tf(t)dt$ は定数。

このとき

$$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 \{(a+1)t-2b\}dt$$

$$=\left[\frac{a+1}{2}t^2-2bt\right]_0^1=\frac{a+1}{2}-2b$$

$$b=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t\{(a+1)t-2b\}dt$$

$$=\int_0^1 \{(a+1)t^2-2bt\}dt=\left[\frac{a+1}{3}t^3-bt^2\right]_0^1$$

$$=\frac{a+1}{3}-b$$

よって　$a+4b=1$，$a-6b=-1$

ゆえに　$a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{1}{5}$

したがって

$$f(x)=\left(\frac{1}{5}+1\right)x-\frac{2}{5}$$

すなわち

$$f(x)=\frac{6}{5}x-\frac{2}{5}$$

2

[正解] オカ：-1，キ：3，ク：4，ケ：4，コサ：32，
シ：0，ス：0

[解説]

$f(x)=\int_0^x t(t+1)(4-t)dt$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t(t+1)(4-t)dt \quad \text{[B]}$$

$$=x(x+1)(4-x)=-x(x+1)(x-4)$$

[B]　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=g(x)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 0,\ 4$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

ここで

$$f(x)=\int_0^x t(t+1)(4-t)dt$$

$$=\int_0^x (-t^3+3t^2+4t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3+2t^2\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2$$

ゆえに

$$f(-1)=-\frac{1}{4}\cdot(-1)^4+(-1)^3+2\cdot(-1)^2$$

$$=\frac{3}{4}$$

$$f(0)=0$$

$$f(4)=-\frac{1}{4}\cdot4^4+4^3+2\cdot4^2=32$$

よって　**$x=-1$ で極大値 $\dfrac{3}{4}$，$x=4$ で極大値 32，**

$x=0$ で極小値 0

をとる。

第18講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3，ウ：2，エ：④，オ：③

[解説]

C' を定数とすると

$$\int(x-\alpha)^2\,dx$$

$$=\int(x^2-2\alpha x+\alpha^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+\alpha^2 x+C'$$

$$=\frac{1}{3}(\boldsymbol{x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3})+\boldsymbol{\frac{\alpha^3}{3}}+C' \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha^3}{3}+C'$$

[A]　3 次式の因数分解
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

$\dfrac{\alpha^3}{3}+C'$ は定数であるから

$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

が成り立つ。

2 [正解] カ：9

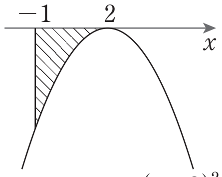
[解説]

放物線 $y=-x^2+4x-4$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-x^2+4x-4=0$$

$$-(x-2)^2=0$$

よって　$x=2$



右図より，求める面積は

$$-\int_{-1}^{2}(-x^2+4x-4)dx \quad \text{[B]}$$

$$=\int_{-1}^{2}(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-1}^{2} \quad \text{[C]}$$

$$=-\frac{1}{3}(-1-2)^3$$

$$=9$$

[B]　曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は，区間 $a\leqq x\leqq b$ において

常に $f(x)\geqq 0$ のとき

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

常に $f(x)\leqq 0$ のとき

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

[C]　積分の公式

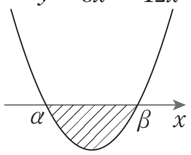
$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

（C は定数）

3 [正解] キク：28，ケ：7

[解説]

放物線 $y=3x^2-12x-9$ と x 軸の共有点の x 座標は



$$3x^2-12x-9=0$$

より　$x=2\pm\sqrt{7}$

$\alpha=2-\sqrt{7}$，$\beta=2+\sqrt{7}$ と

とおくと，右図より，求める面積は

$$-\int_{\alpha}^{\beta}(3x^2-12x-9)dx$$

$$=-3\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-3\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$ [D]

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{7})^3$$

$$=28\sqrt{7}$$

[D]　積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

第18講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイウ：128

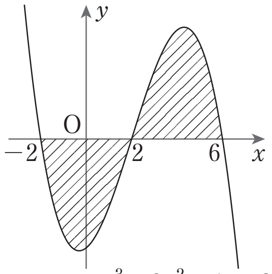
[解説]

曲線 $y=-x^3+6x^2+4x-24$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-x^3+6x^2+4x-24=0$$
$$x^3-6x^2-4x+24=0$$
$$(x-2)(x^2-4x-12)=0$$
$$(x-2)(x+2)(x-6)=0$$

よって

$$x=-2,\ 2,\ 6$$



右図より，求める面積は

$$-\int_{-2}^{2}(-x^3+6x^2+4x-24)dx$$
$$+\int_{2}^{6}(-x^3+6x^2+4x-24)dx \quad \text{[A]}$$
$$=-2\int_{0}^{2}(6x^2-24)dx \quad \text{[B]}$$
$$+\int_{2}^{6}(-x^3+6x^2+4x-24)dx$$
$$=-2\Big[2x^3-24x\Big]_0^2+\Big[-\frac{1}{4}x^4+2x^3+2x^2-24x\Big]_2^6$$
$$=-2(2\cdot2^3-24\cdot2)-\frac{1}{4}(6^4-2^4)+2(6^3-2^3)$$
$$+2(6^2-2^2)-24(6-2)$$
$$=\mathbf{128}$$

[A]　曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は，区間 $a\leqq x\leqq b$ において

つねに $f(x)\geqq0$ のとき

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

つねに $f(x)\leqq0$ のとき

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

[B]

n が奇数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=0$

n が偶数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$

（面積を求める計算の別解）

$$-x^3+6x^2+4x-24$$
$$=-(x+2)(x-2)(x-6)$$
$$=-\{(x-2)+4\}(x-2)\{(x-2)-4\}$$
$$=-(x-2)\{(x-2)^2-16\}$$
$$=-(x-2)^3+16(x-2)$$

求める面積は

$$-\int_{-2}^{2}\{-(x-2)^3+16(x-2)\}dx$$
$$+\int_{2}^{6}\{-(x-2)^3+16(x-2)\}dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{4}(x-2)^4+8(x-2)^2\right]_{-2}^{2}$$ [C]
$$+\left[-\frac{1}{4}(x-2)^4+8(x-2)^2\right]_{2}^{6}$$
$$=-\frac{1}{4}(-2-2)^4+8(-2-2)^2$$
$$-\frac{1}{4}(6-2)^4+8(6-2)^2$$
$$=\mathbf{128}$$

［C］　積分の公式
$$\int(x-\alpha)^n\,dx$$
$$=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$$（C は定数）

第18講　PART3　確認問題 解答

1

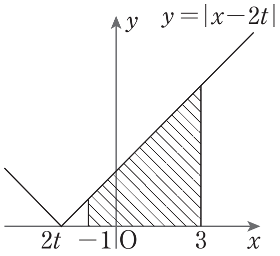
[正解] ア：1，イ：2，ウ：4

[解説]

(i)　$2t \leqq -1$ すなわち $t \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき [A]

$-1 \leqq x \leqq 3$ では　$x-2t \geqq 0$

よって



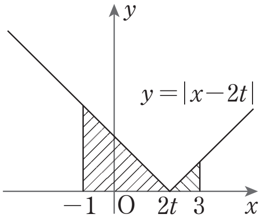
$$f(t)=\int_{-1}^{3}(x-2t)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{-1}^{3}$$
$$=-8t+4$$

(ii)　$-1<2t<3$ すなわち $-\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{3}{2}$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 2t$ では　$x-2t \leqq 0$

$2t \leqq x \leqq 3$ では　$x-2t \geqq 0$

よって



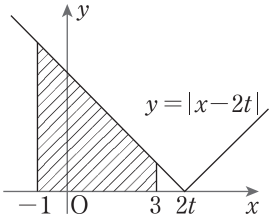
$$f(t)=\int_{-1}^{2t}-(x-2t)dx+\int_{2t}^{3}(x-2t)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{-1}^{2t}+\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{2t}^{3}$$
$$=-\frac{1}{2}(4t^2-1)+2t(2t+1)+\frac{1}{2}(9-4t^2)-2t(3-2t)$$
$$=4t^2-4t+5$$
$$=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4$$

[A]　絶対値記号をはずす境目（この問題では $x=2t$）が
(i)　積分区間より左側
(ii)　積分区間内
(iii)　積分区間より右側
のいずれにあるかで場合分けを行う。

(iii) $3 \leqq 2t$ すなわち $\frac{3}{2} \leqq t$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 3$ では　$x-2t \leqq 0$

よって



$$f(t)=\int_{-1}^{3} -(x-2t)dx$$

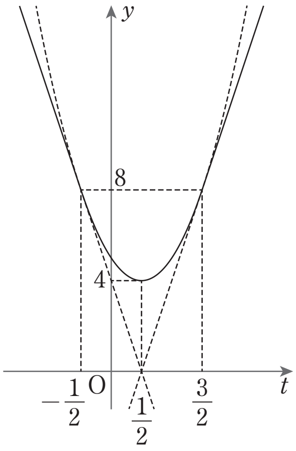
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{-1}^{3}$$

$$=8t-4$$

(i)~(iii)より

$$f(t)=\begin{cases} -8t+4 & \left(t \leqq -\frac{1}{2}\right) \\ 4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4 & \left(-\frac{1}{2}<t<\frac{3}{2}\right) \\ 8t-4 & \left(\frac{3}{2} \leqq t\right) \end{cases}$$

よって，$y=f(t)$ のグラフは次図。



したがって，$f(t)$ は $\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$ **で最小値 4** をとる。

第19講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3

[解説]

放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0$$

よって　$x=1$

直線 $y=-4x$ と x 軸の共有点の x 座標は　$x=0$

放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=-4x$ の共有点の x 座標は

$$x^2-2x+1=-4x$$

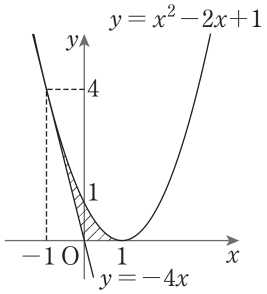
より

$$x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0 \quad \text{[A]}$$

よって　$x=-1$

ゆえに，$x=-1$ の点で接する。



右図より，求める面積は

$$\int_{-1}^{0}\{(x^2-2x+1)-(-4x)\}dx \quad \text{[B]}$$

$$+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}-1+1+\frac{1}{3}-1+1$$

$$=\frac{2}{3}$$

[A]　2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，$x=\alpha$ の点で接するとき，方程式 $f(x)-g(x)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもち，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因数にもつ。

[B]　区間 $a\leqq x\leqq b$ において，つねに $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_{-1}^{0}\left\{\left(x^2-2x+1\right)-(-4x)\right\}dx$$

$$+\int_{0}^{1}\left(x^2-2x+1\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x+1\right)dx-\int_{-1}^{0}(-4x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x-1)^2\,dx-\frac{1}{2}\cdot\{0-(-1)\}\cdot 4$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{-1}^{1}-2$$ [C]

$$=\frac{8}{3}-2=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

[C]　積分の公式

$$\int(x-a)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-a)^3+C$$

（C は定数）

2 **[正解]** ウエ：27，オ：2

[解説]

$y'=-6x^2+12x+6$ より，$x=2$ のとき　$y'=6$

よって，点 $(2,\ 9)$ における接線の方程式は

$$y=6(x-2)+9$$ [D]

すなわち　$y=6x-3$

この接線と曲線の共有点の x 座標は

$$-2x^3+6x^2+6x-11=6x-3$$

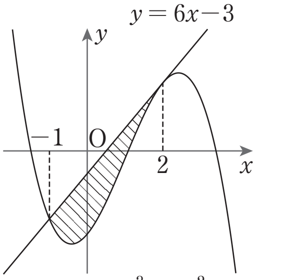
より

$$x^3-3x^2+4=0$$

$$(x-2)^2(x+1)=0$$

よって

$$x=2,\ -1$$ [A]



[D]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

右図より，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\left\{(6x-3)-\left(-2x^3+6x^2+6x-11\right)\right\}dx$$ [B]

$$=\int_{-1}^{2}\left(2x^3-6x^2+8\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-2x^3+8x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}(16-1)-2(8+1)+8(2+1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

（面積を求める計算の別解）

$$\int_{-1}^{2}\left\{(6x-3)-\left(-2x^3+6x^2+6x-11\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}2(x-2)^2(x+1)dx$$

$$=2\int_{-1}^{2}(x-2)^2\{(x-2)+3\}dx$$

$$=2\int_{-1}^{2}\left\{(x-2)^3+3(x-2)^2\right\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}(x-2)^4+(x-2)^3\right]_{-1}^{2}$$ [E]

$$=2\left(-\frac{81}{4}+27\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

[E]　積分の公式

$$\int(ax+b)^n dx$$
$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$$

（C は定数）

第19講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：4

[解説]

放物線 $y=-x^2+8x=-x(x-8)$ と x 軸の共有点の x 座標は　$x=0,\ 8$

放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は

$$-x^2+8x=ax$$

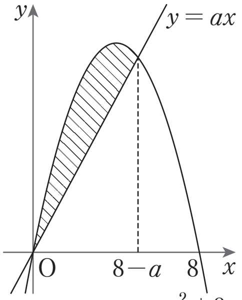
より

$$x^2+(a-8)x=0$$

$$x\{x-(8-a)\}=0$$

ゆえに　$x=0,\ 8-a$

よって，放物線と直線は右図。



放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S，このうちの $y \geqq ax$ の部分，すなわち放物線と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると，求める条件は

$$S=8S(a) \quad \text{[A]}$$

ここで

$$S=\int_0^8(-x^2+8x)dx=-\int_0^8 x(x-8)dx$$

$$=\frac{1}{6}(8-0)^3=\frac{8^3}{6} \quad \text{[B]}$$

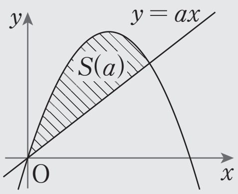
$$S(a)=\int_0^{8-a}(-x^2+8x-ax)dx$$

$$=-\int_0^{8-a}x(x+a-8)dx$$

$$=\frac{1}{6}(8-a)^3 \quad \text{[B]}$$

よって

[A]　放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求め，放物線と直線で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a で表し，S と $S(a)$ の比から a の方程式を作って解けばよい。



[B]　積分の公式

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\frac{8^3}{6}=8\cdot\frac{1}{6}(8-a)^3$$

$$8^3=2^3(8-a)^3$$

a は実数より

$$8=2(8-a)$$

したがって

$$a=4\quad(0<a<8\ \text{を満たす})$$

第19講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：8

[解説]

直線 l の方程式は

$$y=a(x-1)+12$$

すなわち　$y=ax-a+12$

放物線 C と直線 l の共有点の x 座標は

$$6x^2=ax-a+12$$

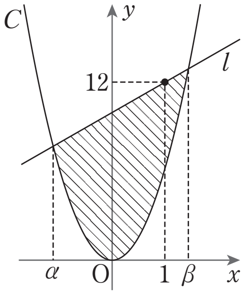
すなわち

$$6x^2-ax+a-12=0$$

の実数解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot6\cdot(a-12)=(a-12)^2+144$$

よって，つねに $D>0$ であるから，放物線 C と直線 l はつねに異なる 2 つの共有点をもつ。



2 つの共有点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると [A]

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\{(ax-a+12)-6x^2\}dx$$

$$=-6\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-6\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=(\beta-\alpha)^3$$ [B]

ここで

$$\beta-\alpha=\frac{a+\sqrt{D}}{12}-\frac{a-\sqrt{D}}{12}=\frac{\sqrt{D}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{(a-12)^2+144}}{6}$$

[A]　放物線と直線の 2 つの共有点の x 座標を α，β とおくと，放物線と直線で囲まれた部分の面積は，$\beta-\alpha$ で表すことができる。

[B]　積分の公式

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

であるから，$a=12$ のとき最小となり，このとき

$S(a)$ も最小となる。

よって，$S(a)$ の最小値は

$$S(12)=\left(\frac{\sqrt{144}}{6}\right)^3=2^3=8$$

[MEMO]

[MEMO]

[MEMO]

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。